Svarforslag til Alfa, Forstudier

Vi håber disse svarforslag kan være til glæde for læseren, og vi modtager gerne forslag til forbedringer:

Kristine.Jess@skolekom.dk

Med venlig hilsen
forfatterne

Indhold

Kapitel 1 Regn den ud

Øvelse 1
1) 5489
9000 + 800 + 10 + 2

2) 475.639

3) 222.555.444 er størst.

4a) 692.294

4b) 3865

4c) 665115

4d) 547

5) fx følgende: 20 : 5; 85 : 5; 119 : 7; 675 : 5; 1477 : 7; 4746 : 7; 17 847 : 9.

6) $150 \cdot 300 = 450.000$, så vi kan udelukke 90.921, 43.061 og 23.881.

Øvelse 2
1) Individuelt svar.

2) -5 + 5 = 0, resten giver alle 5.

3) Regel 4, da man kan række fx -4 fra 5 ved at beregne 5 – (-1) – (-1) – (-1) – (-1).

4) 500

5) 4243

Øvelse 3
1) De to parenteser er overflødige, da der er tale om en addition af to størrelser, hvor der ikke er tvivl om rækkefølgen af udregningen.
I de to led er alle tal og beregninger ens, lige på nær 5 og -5. Tallene har derfor modsat fortegn, og samme numeriske værdi. Summen bliver altså 0.

2) 100 + 22 · 200 : (52 – 32) er størst.

3) 6, da der er multipliceret med 0.

4) -72

5) $\frac{900 \cdot (-16) \cdot 2}{(-5) \cdot 30 \cdot (-8)} = -24$

6)
fx følgende 5 · 2 + 2 =
5 · (2 + 3) =
5 · 2 + 5 · 3=
5 · (4 + 2) – 5 · 4 + 2 =
(3 + 2) + (7 – 1) : 2 =
(5 + 8 : 2) · 2 =
(5 + 8 : 2) : (8 : 4) : (3 – 1) =

Øvelse 4
1) $\frac{10}{4} + \frac{3}{4} + \frac{7}{4} - \frac{16}{4} = \frac{10+3+7-16}{4} = 1$

2) $\frac{5}{7} + \frac{10}{7} - \frac{1}{7} - 2 = \frac{5+10-1-14}{7} = 0$

3) $\frac{9}{16}$

4)

$\frac{1}{2}+\frac{11}{18}-\frac{2}{6}=\frac{9+11-6}{18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}=\frac{28}{36}$

$\frac{2}{5}+\frac{8}{10}-\frac{3}{15}=\frac{12+24-6}{30}=\frac{30}{30}=1=\frac{36}{36}$

$\frac{20}{24}+\frac{2}{3}-\frac{9}{12}=\frac{20+16-18}{24}=\frac{18}{24}=\frac{27}{36}$

Rækkefølge $\frac{20}{24}+\frac{2}{3}-\frac{9}{12}$, $\frac{1}{2}+\frac{11}{18}-\frac{2}{6}$, $\frac{2}{5}+\frac{8}{10}-\frac{3}{15}$.

5)

$\frac{1}{2}+\frac{7}{12}-\frac{17}{24}=\frac{12+14-17}{24}=\frac{9}{24}$

$\frac{3}{4}+\frac{5}{8}-\frac{19}{24}=\frac{18+15-19}{24}=\frac{14}{24}$

$\frac{20}{24}+\frac{2}{3}-\frac{9}{12}=\frac{20+16-18}{24}=\frac{18}{24}$

Det største af tallene er $\frac{20}{24}+\frac{2}{3}-\frac{9}{12}$

6)

$\frac{1}{2}+\frac{11}{18}-\frac{2}{6}=\frac{9+11-6}{18}=\frac{14}{18}=\frac{7}{9}$

$\frac{2}{5}+\frac{8}{10}-\frac{3}{15}=\frac{12+24-6}{30}=\frac{30}{30}=1$

$\frac{2}{5}+\frac{8}{10}-\frac{3}{15}$ er størst

7)

$\frac{1}{2}-\frac{11}{18}-\frac{2}{6}=\frac{9-11-6}{18}=\frac{-8}{18}$

$\frac{2}{4}-\frac{8}{10}-\frac{3}{15}=\frac{15-24-6}{30}=\frac{-15}{30}=-\frac{1}{2}=-\frac{9}{18}$

$\frac{1}{2}-\frac{11}{18}-\frac{2}{6}$ er størst

8)

$\frac{56}{300}+\frac{50}{100}+0{,}15-0{,}3+\frac{5}{6}-\frac{1}{3}=$

$\frac{56}{300}+\frac{50}{100}+\frac{15}{100}-\frac{30}{100}+\frac{5}{6}-\frac{2}{6}=$

$\frac{56}{300}+\frac{35}{100}+\frac{3}{6}=$

$\frac{56}{300}+\frac{105}{300}+\frac{150}{300}=$

$\frac{311}{300}$

Øvelse 5

1)

$\frac{50}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{100}{21} < 5$

$\frac{50}{7} : \frac{2}{3} = \frac{50 \cdot 3}{7 \cdot 2} = \frac{150}{14} > 5$

$5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} < 5$

$5 : \frac{3}{4} = \frac{5 \cdot 4}{3} = \frac{20}{3} > 5,$

$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{81}{16} > 5$

$\frac{50}{7} : \frac{2}{3}$, $5 : \frac{3}{4}$ og $\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}$ er større end 5

2)

Areal = $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ km^2.

Omkreds = $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ km.

Antallet af stolper = $\dfrac{\frac{5}{2}\text{km}}{\frac{5}{2}\text{m}} = \dfrac{\frac{5000}{2}\text{m}}{\frac{5}{2}\text{m}} = \frac{5000}{2} \cdot \frac{2}{5} = 1000.$

3) $100 : \frac{1}{4}$

4) 0, da 0 er faktor i begge led.

5) fx følgende:

$\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$

$\frac{1}{3} + \frac{3}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}$

$\frac{1}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{11}$

$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{11}$

$\left(\frac{2}{7} : \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{11}$

$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{11} - \frac{2}{13}\right)$

$\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{2}{11} - \frac{2}{13} : \frac{1}{4}\right)$

Øvelse 6

1) 72 kr.

2) 4 kr.

3) 560,70 kr.

4) 62,65 kr.

Øvelse 7
1) 25 %

2) 2 ‰

3) 400 %

4) 100 %

5) 400 %

6) 80 %

Øvelse 8
1) 500 kr.

2) 120 kr.

3) 20 kr.

4) 288 kr.

Øvelse 9
1) $\frac{1062{,}5-850}{850}\cdot 100\% = 25\ \%$

2) $\frac{45000-42300}{45000}\cdot 100\% = 6\ \%$

3)
$\frac{3625-2900}{3625}\cdot 100\% = 20\ \%$ er den rigtige rabat, hvorimod $\frac{3625-2900}{2900}\cdot 100\% = 25\ \%$.
Prisen før nedsættelsen er 25 % større end den nuværende pris, men rabatten er kun på 20 %.

Øvelse 10
Det er af købsprisen, da avancen aldrig kan være mere end 100% af salgsprisen.

Øvelse 11
1)
Rationale fx:
$\sqrt{9}=3;\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}}=\frac{2}{3};\ \sqrt{\frac{81}{16}}=\frac{9}{4};\ \sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}.$

Irrationale fx:
$\sqrt{17};\ \sqrt{\frac{17}{5}};\ \sqrt{\frac{3}{2}};\ \sqrt{\pi}.$

2)
Rationale:
$\sqrt[3]{8}+\sqrt{16}=2+4=6,$
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ og $\frac{\sqrt{2}}{3\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{3}.$

Irrationale:
$2\cdot\sqrt{3}+7 \text{ og } 10+\sqrt[3]{2}.$

Øvelse 12
1)
$\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$
$\sqrt{\frac{9}{49}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}}=\frac{3}{7}$
$\sqrt{18}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{9\cdot 2}\cdot\sqrt{4\cdot 3}=3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=6\sqrt{2\cdot 3}=6\sqrt{6}$
$\sqrt{75}\cdot\sqrt{45}=\sqrt{3\cdot 25}\cdot\sqrt{5\cdot 9}=5\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{5}=15\sqrt{15}$
$\sqrt{-63\cdot(-147)}=\sqrt{63\cdot 147}=\sqrt{7\cdot 9}\cdot\sqrt{3\cdot 49}=21\sqrt{21}$
$\sqrt{\frac{-16}{-9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$

2)
$\sqrt{3^2+4^2}=5$

Da der gælder:

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
$\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$
$\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

Kapitel 2 Symbolbehandling og ligningsløsning

Øvelse 1

1) $(a+2b)+c=a+(2b+c)=a+(c+2b)=(a+c)+2b=(c+a)+2b$

2) $5a+8b+12c-(3a+6b+10c)=5a+8b+12c-3a-6b-10c=2a+2b+2c$

3) $5x+8y+12z-(3x+6y+10z)=5x+8y+12z-3x-6y-10z=2x+2y+2z=2\cdot(x+y+z)$

4) $(2+a)\cdot x-x\cdot(a+1)=2x+a\cdot x-x\cdot a-x=2x-x+a\cdot x-a\cdot x=x$

5) $(2+p)\cdot x-x\cdot(p+1)=2x+p\cdot x-x\cdot p-x=2x-x+p\cdot x-p\cdot x=x$

6) $(a\cdot b)\cdot c+2a\cdot(b\cdot c)=a\cdot(b\cdot c)+2a\cdot(b\cdot c)=3a\cdot(b\cdot c)=3abc$

7) $2abc+3bca+5ca-4ac=2abc+3abc+5ac-4ac=ac+5abc$

8) $a(b+c)-b(a+3)-c(a-3)=$
$ab+ac-ba-3b-ca+3c=ab+ac-ab-3b-ac+3c=3c-3b=3(c-b)$

9) $a(x+y)-x(a+3)-y(a-3)=ax+ay-xa-3x-ya+3y=3y-3x$

Øvelse 2

1)
$$90x+50=85x+65$$
$$90x-85x=65-50$$
$$5x=15$$
$$x=5$$

2)
$$90x-50=85x-65$$
$$90x-85x=-65+50$$
$$5x=-15$$
$$x=-3$$

3)
$$\tfrac{1}{2}x+12=\tfrac{1}{4}x+18$$
$$\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{4}x=18-12$$
$$\tfrac{1}{4}x=6$$
$$x=4\cdot 6=24$$

4)

$$3,2x+100=7,4x+16$$

$$100-16=7,4x-3,2x$$

$$84=4,2x$$

$$x=\frac{84}{4,2}=20$$

5)

$$12\cdot(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}x)+x\cdot(404-401)=4$$

$$12\cdot\tfrac{1}{2}-12\cdot\tfrac{1}{3}x+x\cdot 3=4$$

$$6-4x+3x=4$$

$$\text{-}x=4-6$$

$$x=2$$

6)

$$x+4=6+a$$

$$x=6+a-4$$

$$x=a+2$$

7)

$$x+4a=6a-2$$

$$x=6a-4a-2$$

$$x=2a-2$$

8)

$$9\cdot(x+a)+b\cdot(a-27)=a\cdot(9+b)$$

$$9x+9a+ab-27b=9a+ab$$

$$9x=9a+ab-9a-ab+27b$$

$$9x=27b$$

$$x=3b$$

9)

$$8x+4\cdot(b-3+x)=2\cdot(3x+2a)$$

$$8x+4b-12+4x=6x+4a$$

$$8x+4x-6x=4a-4b+12$$

$$6x=4a-4b+12$$

$$x=\frac{4a-4b+12}{6}$$

10)

$9 \cdot (x + a) + b \cdot (a - 27) = a \cdot (9 + b)$

$9x + 9a + ab - 27b = 9a + ab$

$9x = 9a + ab - 9a - ab + 27b$

$9x = 27b$

$x = 3b$

11) Hvis man indsætter svarforslagene ovenfor, vil man se, at det stemmer.

12a)

$90w - 100 = 85w - 115$

$90w - 85w = \text{-}115 + 100$

$w = \text{-}3$

12b)

$2q - 4a = q - 3a - 2$

$2q - q = \text{-}3a - 2 + 4a$

$q = a - 2$

12c)

$x + 4 = 6 + a$

$a = x - 2$

og

$x + 4a = 6a - 2$

$a = \frac{1}{2}x - 1$

12d)

$8x + 4 \cdot (b - 3 + x) = 2 \cdot (3x + 2a)$

$8x + 4b - 12 + 4x = 6x + 4a$

$4b = 6x + 4a - 8x + 12 - 4x$

$4b = \text{-}6x + 4a + 12$

$b = \frac{\text{-}6x + 4a + 12}{4} = \frac{\text{-}3x + 2a + 6}{2}$

Øvelse 3

1)

$a+b=b+a$ og $a \cdot b=b \cdot a$ følger af de kommutative love.

$(a+b) \cdot 2=2 \cdot (a+b)=2 \cdot a+2 \cdot b=a \cdot 2+b \cdot 2$ følger den kommutative og den distributive lov.

$(a \cdot b)^2=a \cdot b \cdot a \cdot b=a \cdot a \cdot b \cdot a=a^2 \cdot b^2$ følger af den kommutative lov for multiplikation.

$\sqrt{a \cdot b}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ følger af, at kvadratet på begge tal (sider) giver det samme: $\left(\sqrt{a \cdot b}\right)^2=a \cdot b.$

$\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)^2=\left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right) \cdot \left(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\right)=\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b}=a \cdot b,$ hvor den associative og den kommutative lov blev brugt undervejs.

2)

$(a \cdot b)^3=a^3 \cdot b^3$ OK

$(a+b)^3=a^3+b^3$ ikke OK, da $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a \cdot b)^n=a^n \cdot b^n$ OK

$a^{(2+3)}=a^2 \cdot a^3$ OK

$a^{(2 \cdot 3)}=a^2 \cdot a^3$ ikke OK, da $a^2 \cdot a^3=a^5$

$a^{(2 \cdot 3)}=(a^2)^3$ OK

$a^{(n+m)}=a^n \cdot a^m$ OK

$a^{(n \cdot m)}=(a^n)^m$ OK

3)

$(a+b)^2=$

$(a+b)(a+b)=$ pr definition af anden potens

$(a+b)a+(a+b)b=$ den distributive lov

$a(a+b)+b(a+b)=$ den kommutative lov for multiplikation

$a^2+ab+ba+b^2=$ den distributive lov

$a^2+ab+ab+b^2=$ den kommutative lov for multiplikation

$a^2+ab(1+1)+b^2=$ den distributive lov

$a^2+ab \cdot 2+b^2=$

$a^2+2ab+b^2=$ den kommutative lov for multiplikation

a^2+b^2+2ab den kommutative lov for addition

4)

$(a-b)^2 =$

$(a-b)(a-b) =$ pr definition af anden potens

$(a-b)a-(a-b)b =$ den distributive lov

$a(a-b)-b(a-b) =$ den kommutative lov for multiplikation

$a^2 - ab - ba - b\cdot(-b) =$ den distributive lov

$a^2 - ab - ab + b^2 =$ den kommutative lov for multiplikation

$a^2 - ab(1+1) + b^2 =$ den distributive lov

$a^2 - ab\cdot 2 + b^2 =$

$a^2 - 2ab + b^2 =$ den kommutative lov for multiplikation

$a^2 + b^2 - 2ab$ den kommutative lov for addition

5)

$(a+b)^3 =$

$(a+b)(a+b)^2 =$

$a(a+b)^2 + b(a+b)^2 =$

$a(a^2+b^2+2ab) + b(a^2+b^2+2ab) =$

$a\cdot a^2 + a\cdot b^2 + a\cdot 2ab + b\cdot a^2 + b\cdot b^2 + b\cdot 2ab =$

$a^3 + ab^2 + 2a^2b + a^2b + b^3 + 2ab^2 =$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

6a) $a^3\cdot a^5 : a^8 = a^8 : a^8 = 1$

6b) $\left(a^3\right)^5 : a^{15} = a^{15} : a^{15} = 1$

6c) $a^4\cdot b^7\cdot a^{12}\cdot a\cdot b^3\cdot a^3 = a^{20}\cdot b^{10}$

Øvelse 4

1) $\dfrac{a^7\cdot b^4\cdot a^3\cdot c^2}{c^2\cdot a^8\cdot b^6} \underset{c^2 \text{ forkortes}}{=} \dfrac{a^7\cdot b^4\cdot a^3}{a^8\cdot b^6} \underset{a^7 \text{ og } a^3 \text{ samles}}{=} \dfrac{a^{10}\cdot b^4}{a^8\cdot b^6} \underset{a^8 \text{ forkortes}}{=} \dfrac{a^2\cdot b^4}{b^6} \underset{b^4 \text{ forkortes}}{=} \dfrac{a^2}{b^2}$

2) $\dfrac{a^{10}\cdot b^4\cdot a^3\cdot c^2}{c^4\cdot a^8\cdot b^8} = \dfrac{a^{13}\cdot b^4\cdot c^2}{c^4\cdot a^8\cdot b^8} = \dfrac{a^5}{c^2\cdot b^4}$

3) $\dfrac{a^7}{b^6}\cdot\dfrac{a^4}{b^5} : \dfrac{a^4}{b^4} = \dfrac{a^7}{b^6}\cdot\dfrac{a^4}{b^5}\cdot\dfrac{b^4}{a^4} = \dfrac{a^{11}\cdot b^4}{a^4\cdot b^{11}} = \dfrac{a^7}{b^7}$

4) $\dfrac{a}{4}+\dfrac{a}{5}+\dfrac{a}{20} = \dfrac{5a}{4\cdot 5}+\dfrac{4a}{4\cdot 5}+\dfrac{a}{20} = \dfrac{10a}{20} = \dfrac{a}{2}$

5) $\frac{a}{2b}+\frac{a}{3b}+\frac{a}{6b}=\frac{3a}{3\cdot 2b}+\frac{2a}{2\cdot 3b}+\frac{a}{6b}=\frac{6a}{6b}=\frac{a}{b}$

6)

$$x+x:2+x:3+x:6=14$$
$$x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{6}=14$$
$$x+\frac{3x+2x+x}{6}=14$$
$$x+x=14$$
$$x=7$$

7)

$$(x+2)(x+5)-(x^2+3)=0$$
$$x^2+2x+5x+10-x^2-3=0$$
$$7x+7=0$$
$$7x=-7$$
$$x=-1$$

Øvelse 5

1)

$$117\cdot(x-5)\cdot 1024=0$$
$$x-5=0$$
$$x=5$$

2)

$$(x-5)\cdot 112\cdot(x-2)=0$$

$x-5=0$ eller $x-2=0$

$x=5$ eller $x=2$

3)

$$(x-8)\cdot 117\cdot(x+39)\cdot(x^2+12)=0$$

$x-8=0$ eller $x+39=0$ eller $x^2+12=0$.

Derfor er $x=8$ eller $x=-39$ eller $x^2=-12$

Den sidste del har ingen reel løsning, da $x^2\geq 0$ for alle værdier af x.

4)
$(x-3-a)\cdot 7\cdot(x+b)\cdot(x^2+a^2)=0$

$x-3-a=0$ eller $x+b=0$ eller $x^2+a^2=0$

$x=3+a$ eller $x=\text{-}b$ eller $x^2=\text{-}a^2$

Den sidste del har ingen reelle løsninger, da $x^2\geq 0$ for alle værdier af x.

5)
$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$x^2-x-6=0$

$(x-3)(x+2)=0$

$x=3$ eller $x=\text{-}2$

6)
$p^2-p-6=0$

$(p-3)(p+2)=0$

$p=3$ eller $p=\text{-}2$

7)
$3b^2+3b-18=0$, $D=3^2-4\cdot 3\cdot(\text{-}18)=225$

$b=\frac{\text{-}3\pm\sqrt{225}}{2\cdot 3}=\frac{\text{-}3\pm 15}{6}$

$b=2$ eller $b=\text{-}3$

8)
$x^2-4x-21=0$

$(x-7)(x+3)=0$

$x=7$ eller $x=\text{-}3$

Kan også løses sådan:
$x^2-4x-21=0$

$D=(\text{-}4)^2-4\cdot 1\cdot(\text{-}21)=100$

$x=\frac{4\pm\sqrt{100}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 10}{2}$

$x=7$ eller $x=\text{-}3$

9)
$$3x^2 - 12x - 63 = 0$$
$$3(x^2 - 4x - 21) = 0$$
$x^2 - 4x - 21 = 0,$ løses nu som opgave 8
$x = 7$ eller x = -3

10)
$$6x^2 - 5x + 1 = 0$$
$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 1 = 1$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 6} = \frac{5 \pm 1}{12}$$
$x = \frac{1}{2}$ eller $x = \frac{1}{3}$

11)
$$x^2 + 1,5x - 24,94 = 0$$
$$D = (1,5)^2 - 4 \cdot (-24,94) = 102,01$$
$$x = \frac{-1,5 \pm \sqrt{102,01}}{2 \cdot 1} = \frac{-1,5 \pm 10,1}{2}$$
$x = 4,3$ eller $x = -5,3$

12)
a), b) og c) har samme løsning som delopgave 11), fx kan a) omskrives til
$100 \cdot (x^2 + 1,5x - 24,94) = 0.$
d) har andre løsninger: x = 43 eller x = -58.

13a)
$$7(x-2)(x-1) = 0$$
$$7(x^2 - 3x + 2) = 0$$
$$7x^2 - 21x + 14 = 0$$

13b)
$$2,5(x-5)^2 = 0$$
$$2,5(x^2 - 10x + 25) = 0$$
$$2,5x^2 - 25x + 62,5 = 0$$

13c)
$$x^2 + 12 = 0$$

Øvelse 6
1) Først vises løsning med eliminationsmetoden derefter med substitutionsmetoden.

Eliminationsmetoden:
$(1) 10y+6z=0$
$(2) 12y+9z=\text{-}18$

Gang (1) altså første ligning med 1,5:
$15y+9z=0$
$12y+9z=\text{-}18$

Træk (2) fra (1):
$15y+9z-(12y+9z)=0-(\text{-}18)$
$3y=18$
$y=6$

Indsæt *y* = 6 i (1):
$10\cdot 6+6z=0$
$60+6z=0$
$6z=\text{-}60$
$z=\text{-}10$
Løsning *y* = 6 og *z* = -10.

Substitutionsmetoden:
$10y+6z=0$
$12y+9z=\text{-}18$

Find *z* i (1):
$10y+6z=0$
$6z=\text{-}10y$
$z=\text{-}\frac{10}{6}y$

z indsættes i (2):

$12y + 9z = -18$

$12y + 9 \cdot \left(-\frac{10}{6}y\right) = -18$

$12y - 15y = -18$

$-3y = -18$

$y = 6$

y = 6 indsættes i $z = -\frac{10}{6}y$:

$z = -\frac{10}{6} \cdot 6$

$z = -10$

Løsning y = 6 og z = -10.

2) Først vises løsning med eliminationsmetoden derefter med substitutionsmetoden.

Eliminationsmetoden:

(1) $x + y + z + 4 = 10$

(2) $y + z = 5$

(3) $z - y = 1$

Træk (2) fra (1) og få (1'):

(1') $x + y + z + 4 - y - z = 10 - 5$

(2) $y + z = 5$

(3) $z - y = 1$

(1') $x + 4 = 5$

(2) $y + z = 5$

(3) $z - y = 1$

(1') $x = 1$

(2) $y + z = 5$

(3) $z - y = 1$

Læg (3) til (2)

(1') $x = 1$

(2') $y + z + z - y = 5 + 1$

(3) $z - y = 1$

(1') $x = 1$

(2') $2z = 6$

(3) $z - y = 1$

Løs (2') og sæt værdien ind i (3).

(1') $x = 1$

(2') $z = 3$

(3) $3 - y = 1$, så $y = 2$

Løsning: $x = 1$, $y = 2$ og $z = 3$

Substitutionsmetoden:

(1) $x + y + z + 4 = 10$

(2) $y + z = 5$

(3) $z - y = 1$

(2) og (3) kan løses først:

(1) $x + y + z + 4 = 10$

(2) $y + z = 5$

(3') $z = 1 + y$

z indsættes i (2):

(1) $x + y + z + 4 = 10$

(2) $y + 1 + y = 5$, så $y = 2$

(3') $z = 1 + y$

Den fundne værdi af y indsættes i (3'):

(1) $x + y + z + 4 = 10$

(2) $y + 1 + y = 5$, så $y = 2$

(3') $z = 1 + 2 = 3$

De fundne værdier af y og z indsættes i (1)

(1) $x + 2 + 3 + 4 = 10$, heraf fås $x = 1$

(2) $y + 1 + y = 5$, så $y = 2$

(3') $z = 1 + 2 = 3$

Løsning: $x = 1$, $y = 2$ og $z = 3$

3) Først vises løsning med substitutionsmetoden derefter med eliminationsmetoden.

Substitutionsmetoden:

(1) $4x-5y+z=4$

(2) $4x+5y+7z=4$

(3) $12x-3y+12z=-6$

z isoleres i (1):

(1) $4x-5y+z=4$, så $z=4-4x+5y$

(2) $4x+5y+7z=4$

(3) $12x-3y+12z=-6$

z indsættes i (2) og (3):

(1') $4x-5y+z=4$

(2') $4x+5y+7\left(4-4x+5y\right)=4$

(3') $12x-3y+12\left(4-4x+5y\right)=-6$

(1') $z=4-4x+5y$

(2') $-24x+40y=-24$

(3') $-36x+57y=-54$

I (2') bestemmes x:

(2') $-24x+40y=-24,\ så\ x=\frac{24+40y}{24}$

x indsættes i (3'):

(3') $-36\frac{24+40y}{24}+57y=-54$

$$-3\frac{24+40y}{2}+57y=-54$$

$$-3(12+20y)+57y=-54$$

$$-36-60y+57y=-54$$

$$y=6$$

Den fundne værdi af y indsættes i (2'):

$x=\frac{24+40\cdot 6}{24}=11$

De fundne værdier af x og y indsættes i (1'):
(1') $z = 4 - 4 \cdot 11 + 5 \cdot 6 = -10$
Løsningen er x = 11, y = 6 og z = -10.

Eliminationsmetoden
(1) $4x - 5y + z = 4$
(2) $4x + 5y + 7z = 4$
(3) $12x - 3y + 12z = -6$

Læg (1) til (2):
(1) $4x - 5y + z = 4$
(2') $4x + 5y + 7z + (4x - 5y + z) = 4 + 4$
(3) $12x - 3y + 12z = -6$

(1) $4x - 5y + z = 4$
(2') $8x + 8z = 8$
(3) $12x - 3y + 12z = -6$

Gang (2') med 1,5:
(1) $4x - 5y + z = 4$
(2'') $12x + 12z = 12$
(3) $12x - 3y + 12z = -6$

Træk (2'') fra (3):
(1) $4x - 5y + z = 4$
(2'') $12x + 12z = 12$
(3) $12x - 3y + 12z - (12x + 12z) = -6 - 12$

(1) $4x - 5y + z = 4$
(2'') $12x + 12z = 12$
(3') $y = 6$

Indsæt den fundne værdi af y i (1'):
(1') $4x - 30 + z = 4$, så $4x + z = 34$
(2'') $12x + 12z = 12$
(3') $y = 6$

Gang (1') med 3:
$(1'')\ 12x + 3z = 102$
$(2'')\ 12x + 12z = 12$
$(3')\ y = 6$

Træk (1'') fra (2''):
$(1'')\ 12x + 3z = 102$
$(2''')\ 12x + 12z - (12x + 3z) = 12 - 102$
$(3')\ y = 6$
$(1'')\ 12x + 3z = 102$
$(2''')\ 9z = \text{-}90$, så $z = \text{-}10$
$(3')\ y = 6$

Indsæt z i (1'')
$(1'')\ 12x + 3(\text{-}10) = 102$, så $x = 11$
$(2''')\ z = \text{-}10$
$(3')\ y = 6$
Løsningen er x = 11, y = 6 og z = -10

4)
Beslut dig først for, hvad løsningerne skal være og skriv så nogle ligninger op, der tilfredsstilles af disse løsninger. Det vil sige, du beslutter fx, at x skal være lig 5 og y lig 3. Så tænker du fx:
2 · 5 + 8 · 3 = 34 og skriver som (1) ligning: 2x + 8y = 34.

Derefter vælger du nogle andre koefficienter fx -7 og 7, hvilket giver -7 · 5 + 7 · 3 = -14 og skriver som (2) ligning: -7x + 7y = -14.

Så er du sikker på, at de to ligninger:
(1) 2x + 8y = 34
(2) -7x + 7y = -14
har løsningen x = 5 og y = 3.

5)
Konstruer et ligningssystem med tre ubekendte, som har løsningen x = 10, y = 20 og z = -3.
Vi vælger igen simple små koefficienter og ser, hvad regnestykkerne giver:

(1) 2 · 10 + 2 · 20 + 20 · (-3) = 0
(2) 8 · 10 + 1 · 20 + 33 · (-3) = 1

(3) $1 \cdot 10 + 1 \cdot 20 + 1 \cdot (-3) = 27$

Så kan vi være sikre på, at $x = 10$, $y = 20$ og $z = -3$ er løsninger til ligningssystemet:

(1) $2x + 2y + 20z = 0$
(2) $8x + y + 33z = 1$
(3) $x + y + z = 27$

6)
Man kan beslutte sig til, at løsningerne skal være $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ og $v = 2$.

Derefter vælger man nogle tilfældige koefficienter som fx 5, 2, 7 og 1 at gange de fire ubekendte med, hvilket giver den første ligning: $5x + 2y + 7z + 1v = 32$.

Til de øvrige tre ligninger vælges også tilfældige koefficienter, som ganges med de samme løsninger, fx kunne anden ligning være: $2x + 2y + 2z + 2v = 16$.

Kapitel 3 Formler i geometriens univers

Øvelse 1

1)
Omkreds = $2a + 2b$
$100 = 2a + 60$
$a = 20$

2)
Omkreds = $4x$
Areal = x^2
$4x = x^2$
$x = 2$

3)
Omkreds = $x + 8 + x + 8 + 20 + 20 = 2x + 56$
Omkreds = 100
$2x + 56 = 100$
$x = 22$

4)
Omkreds = $12x$
Areal = $6x^2$
$12x = 6x^2$
$2x = x^2$
$x = 2$ eller $x = 0$, altså $x = 2$

5)
Samlede kantlængde = $12s$
Kantlængden bliver så $\frac{60}{12} = 5$
Rumfang = 125 cm^3
Overfladeareal $6s^2$
Rumfang = s^3
$6s^2 = s^3$ kan lade sig gøre, hvis $s = 0$ eller $s = 6$, altså $s = 6$

Øvelse 2

1) $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 10$

$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$

$a\cdot b$

$\frac{1}{2}\cdot (a+b)\cdot c$

2)

Areal = $\frac{1}{2}\cdot\left(8x+2x\right)\cdot 2x+\frac{1}{2}\cdot\left(8x+4x\right)\cdot 3x=10x^2+18x^2=28x^2$

Areal = 252: $28x^2=252$, hvoraf $x^2=\frac{252}{28}=9$ eller $x=3$

3)

Areal = $4\cdot\frac{1}{2}\cdot s\cdot s=2s^2$

Areal = 32: $2s^2=32$, hvoraf $s^2=16$ eller $s=4$

Øvelse 3

1)

A: Areal = 8

B: Areal = 18

C: Areal = 17,5

D: Areal = 11

E: Areal = 12

F: Areal = 4

2)

A: Areal = $8a^2$

B: Areal = $18a^2$

C: Areal = $17{,}5a^2$

D: Areal = $11a^2$

E: Areal = $12a^2$

F: Areal = $4a^2$

3)

Ja, for det er talværdien foran a^2, der er afgørende. *B* har det største areal.

4)

$17{,}5a^2 = 70$

$a^2 = \frac{70}{17{,}5} = 4$

$a = 2$

5)

De tre figurer med det største areal er *B*, *C* og *E*. Arealerne er henholdsvis $18a^2$, $17{,}5a^2$ og $12a^2$.
Hvis figur *E* skal nå op over 100 cm^2, skal der gælde:

$12a^2 > 100$

$a^2 > \frac{100}{12} \approx 8{,}33$

Derfor er $a = 3$ en mulighed.

Det fjerdestørste areal er for figur *D*: $11a^2$. Med $a = 3$ får figur *D* et areal på 99.
$a = 3$ er den eneste løsning.

Øvelse 4

1) $s = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

2)

$9^2 + b^2 = 15^2$

$b^2 = 225 - 81 = 144$

$b = 12$

3)

$HB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

$AH = 2$

$AC = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} \approx 6{,}32$

4)

$5^2 + 12^2 = c^2$

$c^2 = 169$

$c = 13$

5) $a = b = \sqrt{s^2 + 3^2}$

6)

$h^2 + \left(\frac{1}{2}s\right)^2 = s^2$

$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}s\right)^2}$

$h = \sqrt{s^2 - \frac{1}{4}s^2}$

$h = \sqrt{\frac{3}{4}s^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}s$

Areal = $\frac{1}{2}h \cdot s = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s \cdot s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

Øvelse 5

A: $8\sqrt{2} \approx 11{,}31$

B: $12\sqrt{2} \approx 16{,}97$

C: $4 + \sqrt{13} + \sqrt{29} + \sqrt{34} \approx 18{,}82$

D: $5 + 3\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{10} \approx 14{,}64$

E: $4 + 4\sqrt{5} \approx 12{,}94$

F: $2\sqrt{5} + 2\sqrt{13} \approx 11{,}68$

Øvelse 6

$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

$b = \sqrt{1^2 + a^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$

$c = \sqrt{1^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$d = \sqrt{1^2 + c^2} = \sqrt{1+5} = \sqrt{5}$

$e = \sqrt{1^2 + d^2} = \sqrt{1+5} = \sqrt{6}$

Fortsæt konstruktionen med 11 flere trekanter. Et linjestykke på $\sqrt{17}$ cm kan konstrueres som hypotenusen i en retvinklet trekant med siderne 4 cm og 1 cm.

Øvelse 7

1) Individuelt svar

2)

Formlen for et prisme $h \cdot G -$ højde · grundflade

Loftsrum = $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 = 90\text{m}^3$

Bassin = $\frac{1}{2}(2+4) \cdot 2 \cdot 100 = 600\text{m}^3$

3a)
Prismet: Arealet af grundfladen har vi fundet i øvelse 4.

Prismets rumfang = $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2 \cdot 2n = \frac{\sqrt{3}}{2}s^2 \cdot n$

Kassens rumfang = $s^2 \cdot n$

$\frac{\sqrt{3}}{2}s^2 \cdot n > s^2 \cdot n$ fordi $\frac{\sqrt{3}}{2} > 1s^2 \cdot n,$ så prismet har det største rumfang.

3b)
Pyramidens rumfang = $\frac{1}{3}(2s)^2 \cdot 2n = \frac{1}{3} \cdot 4s^2 \cdot 2n = \frac{8}{3}s^2 \cdot n$.

Da $\frac{8}{3} > \frac{\sqrt{3}}{2}$ har pyramiden det største rumfang.

Øvelse 8

1) $\sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = \sqrt{300} \approx 17{,}32\text{m}$

2)
$\sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = \sqrt{3s^2} = \sqrt{3} \cdot s$

Hvis diagonalens længde skal være 7, skal der gælde: $\sqrt{3} \cdot s = 7,$ så $s = \frac{7}{\sqrt{3}} \approx 4{,}04$ cm.

3a)
Diagonalen i grundfladen har længden $\sqrt{233^2 + 233^2} \approx 329{,}51\text{m}$.
Derfor er $BD \approx 164{,}76$ m.

I den retvinklede trekant BDE kan vi bestemme DE ved $\sqrt{220^2 - 164{,}76^2} \approx 145{,}79\,\text{m}$.

Rumfanget af pyramiden er derfor $\frac{1}{3} \cdot 145{,}79 \cdot 233^2 \approx 2.638.312{,}6\,\text{m}^3$.

3b)
$\frac{1}{3} \cdot h \cdot 233^2 = 1.628.670$

$h = \frac{1.628.670 \cdot 3}{233^2} = 90\,\text{m}$

3c)
$\frac{1}{3} \cdot 145{,}79 \cdot s^2 = 1.946.667$

$s = \sqrt{\frac{1.946.667 \cdot 3}{147{,}79}} \approx 200\,\text{m}$

Øvelse 9

1)

Hvis kvadratets sidelængde er s, vil kvadratet med dobbelt så stor sidelængde have sidelængden $2s$. Omkredsen i det nye kvadrat er $8s$, hvilket er det dobbelte af det oprindelige kvadrats omkreds på $4s$. Arealet er $2s \cdot 2s = 4s^2$, hvilket er det firdobbelte af det oprindelige areal.

Det samme gælder for rektanglet med sidelængder a og b. Omkredsen fordobles, og arealet firdobles.

2)

Hvis terningens sidelængde er s, vil terningen med dobbelt så stor sidelængde have sidelængden $2s$. Rumfanget er $2s \cdot 2s \cdot 2s = 8s^3$, som er 8 gange så stort.
Overfladearealet bliver 4 gange så stort.

3)

Diagonalen GB har længde $\sqrt{s^2+s^2} = \sqrt{2}s$

Linjestykket DB har derfor længden $\frac{1}{2}\sqrt{2}s$

Højden DE i den øverste pyramide er så (ved hjælp af Pythagoras' sætning)

$$\sqrt{s^2 - \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}s\right)^2} = \sqrt{s^2 - \tfrac{1}{4} \cdot 2 \cdot s^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}s^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot s$$

Rumfanget af den øverste pyramide er derfor $\frac{1}{3} \cdot h \cdot G = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s \cdot s^2 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^3$

Oktaederets rumfang er $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^3 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot s^3 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot s^3$

4)

Hvis sidelængderne fordobles, vil alle arealberegninger, som i princippet altid involverer ‘side gange side’, give fire gange så store tal.

Alle rumfangsberegninger, der i princippet involverer ‘side · side · side’, vil give 8 gange så store tal. Det gør sig gældende for alle plane og rumlige figurer.

Øvelse 10

1) Individuelt svar

2) Omkreds

$$2\pi r = 47$$

$$r = \frac{47}{2\pi}$$

$$r = 7{,}48\,\mathrm{m}$$

3)

Hvis papiret rundfoldes på den lange side, er radius i cirklen $r = \frac{29{,}7}{2\pi} = 4{,}73\,\text{cm}$.

Cylinderens rumfang er derfor $\pi \cdot 4{,}73^2 \cdot 21 \approx 1474\,\text{cm}^3$.

Hvis papiret rundfoldes på den korte side, er radius i cirklen $r = \frac{21}{2\pi} = 3{,}34\,\text{cm}$.

Cylinderens rumfang er derfor $\pi \cdot 3{,}34^2 \cdot 29{,}7 \approx 1042\,\text{cm}^3$.

De to rumfang er 1474cm^3 og 1042cm^3, og de er ikke lige store.

Overfladearealerne er ens og lig med papirets areal.

4)

$\frac{4}{3}\pi r^3 = 1000$

$r = \sqrt[3]{\frac{1000}{\frac{4}{3}\pi}}$

$r \approx 6{,}20\,\text{m}$

Overfladeareal (husk tykkelsen på 5 cm) = $4\pi r^2 \approx 4\pi \cdot 6{,}25^2 = 491\,\text{m}^2$

5)

Cylinderens højde skal være $2r$.

Cylinderens rumfang: $\pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$

Kuglens rumfang: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Cylinderen er $\frac{2\pi r^3 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} 100\% = \frac{2\pi - \frac{4}{3}\pi}{\frac{4}{3}\pi} 100\% = \frac{2-\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} 100\% = 50\%$ større.

6)

Rumfang af cylinder $\pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2\pi r^3$

Overflade af cylinder $2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$

Hvis rumfanget i stedet skulle være en terning, skal dens sidelængde være $s = \sqrt[3]{2\pi r^3} = \sqrt[3]{2\pi} \cdot r$.

Overfladearealet af terningen er så $6s^2 == 6\left(\sqrt[3]{2\pi} \cdot r\right)^2 = 6\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2 \cdot r^2$.

Forholdet mellem overfladearealerne er $\frac{6\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2 \cdot r^2}{6\pi r^2} = \frac{\left(\sqrt[3]{2\pi}\right)^2}{\pi} \approx 1{,}08$.

For at lave terningen skal man bruge ca. 8 % mere materiale.

7a)

Omkredsen af bunden af kræmmerhusene er $\frac{1}{4}$ af cirklens omkreds på $2\pi \cdot 20$.

Omkredsen i bunden af kræmmerhusene er derfor 10π. Radius, *r*, i bunden bliver $2\pi r = 10\pi$, så $r = 5$.

Højden i kræmmerhusene er lig den oprindelige radius = 20.

Rumfanget af et kræmmerhus er $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 20 \approx 523{,}6\text{cm}^3$.

Det samlede rumfang af de 4 kræmmerhuse er 2094,4cm^3.

7b)

Fem kræmmerhuse. Radius i bunden er $\frac{\frac{1}{5}2\pi \cdot 20}{2\pi} = \frac{1}{5} \cdot 20 = 4$. Samlet rumfang

$5 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 4^2 \cdot 20 \approx 1675{,}5\,\text{cm}^3$.

7c)

n kræmmerhuse: $\frac{\frac{1}{n}2\pi \cdot 20}{2\pi} = \frac{20}{n}$. Højden er 20.

Rumfang $= n \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{20}{n}\right)^2 \cdot 20 = n \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{20^2}{n^2} \cdot 20 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{20^3}{n}$.

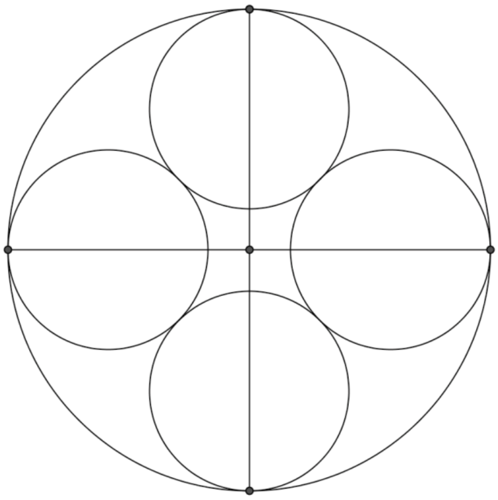
8)

Da radius i den store halvcirkel er 6 og 3 i de små halvcirkler, finder vi arealet som $\pi \cdot (\frac{6^2}{2} + 3^2) =$

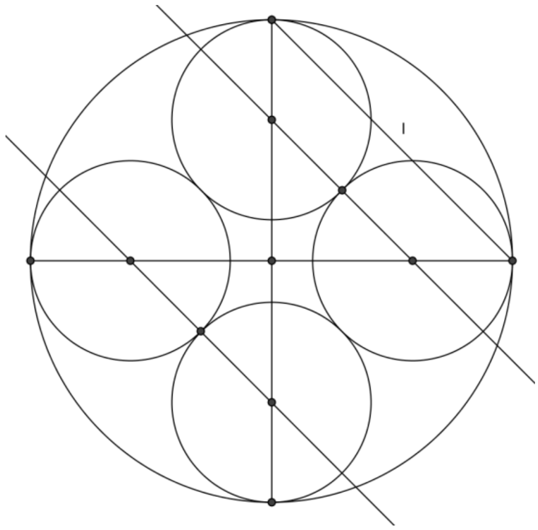
27 π, og omkredsen til 12 π.

Øvelse 11

1) De fire berøringspunkter mellem de små cirkler og den store opsøges. De forbindes som på figuren, og de to diametres skæringspunkt bliver centrum for den store cirkel.

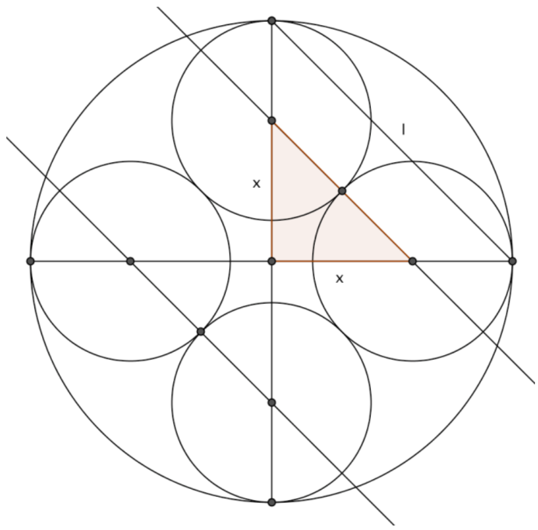


2)



Tegn først linjen l ved at forbinde to af berøringspunkterne, og tegn derefter parallelt med l linjer gennem de små cirklers røringspunkter. Hvor disse linjer skærer de to store diametre i den store cirkel findes de små cirklers centrer.

3)



I den markerede trekant kan *x* bestemmes ved at benytte vores viden om, at radius i de små cirkler er 3 cm.

$$x^2 + x^2 = 6^2$$

$$x = \sqrt{\frac{6^2}{2}} = \sqrt{18} \approx 4,24$$

Radius i den store cirkel er $\sqrt{18} + 3 \approx 7,24$.

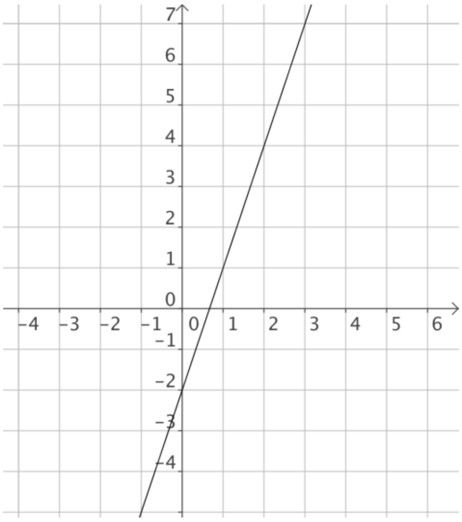
Kapitel 4 Funktioner

Øvelse 1

1)

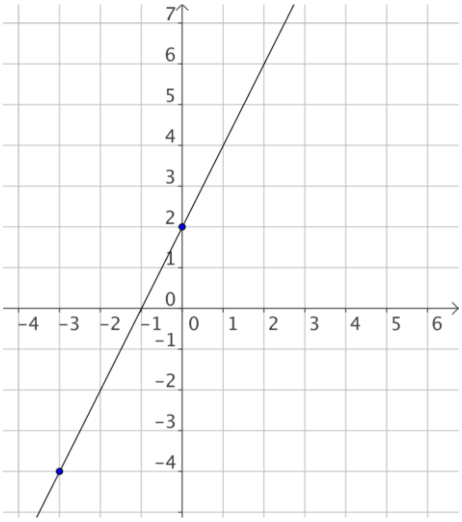
$y = 3x - 2$

x	1	2	3	4	5	6
y	1	4	7	10	13	16



2)

$y = 2x + 2$



y er to større end det dobbelte af x.

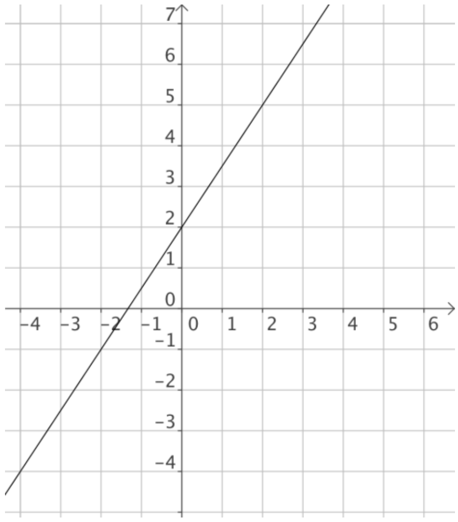
3)

$y = x + 5$

x	1	2	3	4	5	6
y	6	7	8	9	10	11

y er fem større end *x*.

4)



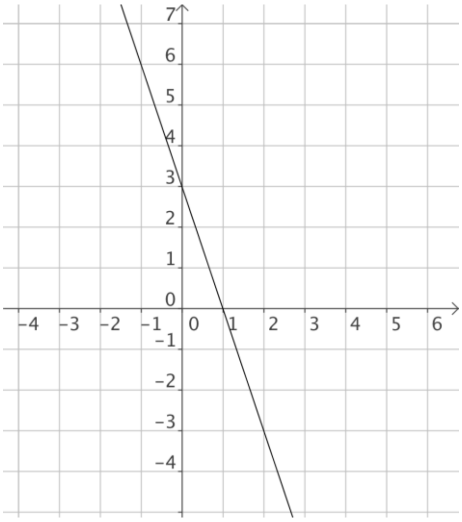
x	1	2	3	4	5	6
y	3,5	5	6,5	8	9,5	11

y beregnes ved at gange *x* med $1\frac{1}{2}$ og derefter lægge to til.

Øvelse 2

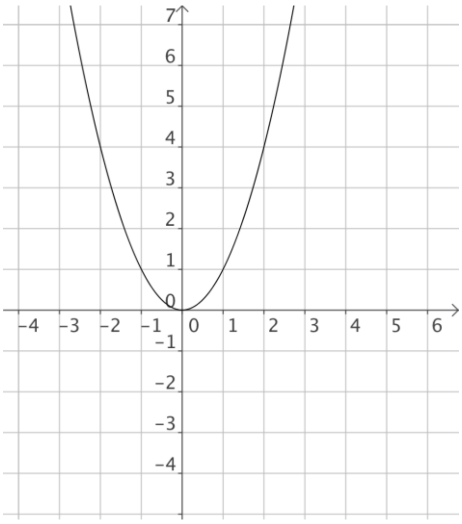
1)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	9	6	3	0	-3	-6



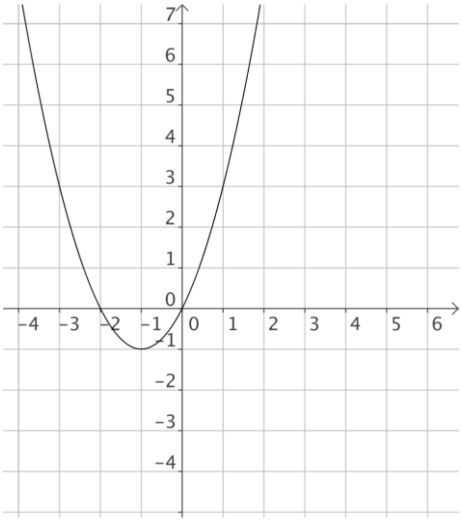
2)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	1	0	1	4	9



3)

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0	-1	0	3	8	15



Øvelse 3

1), 5) og 9) hører sammen.

2), 6) og 8) hører sammen.

3), 4) og 7) hører sammen.

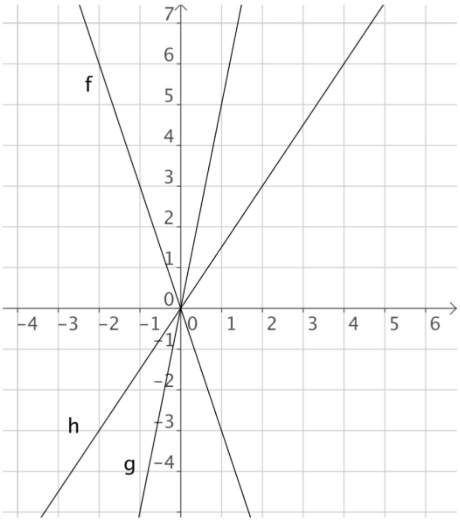
Øvelse 4

$f(x) = 2x$

$g(x) = \frac{1}{3}x$

$h(x) = -2x$

Øvelse 5



Øvelse 6

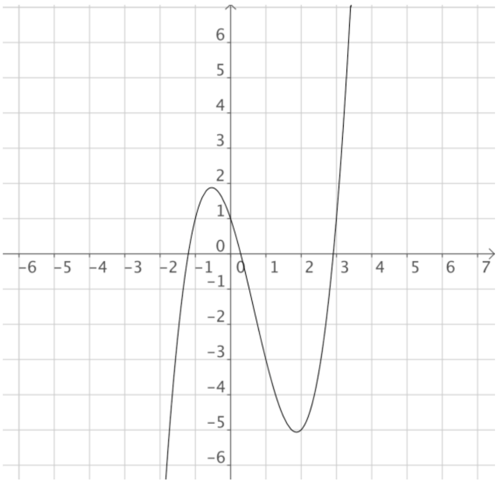
$f(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) = -\frac{1}{x}$

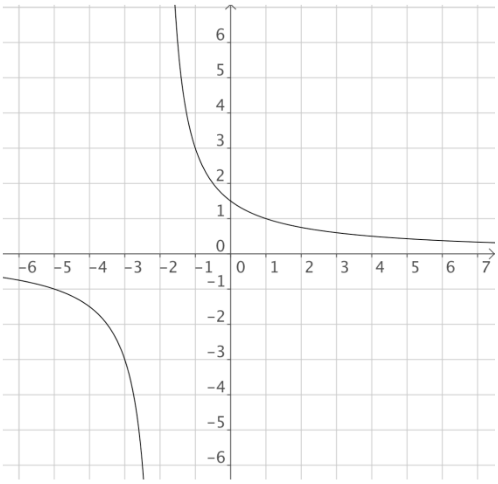
$h(x) = \frac{3}{x}$

Øvelse 7

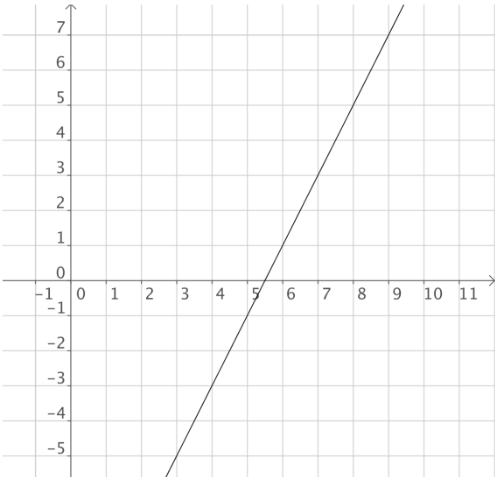
1)



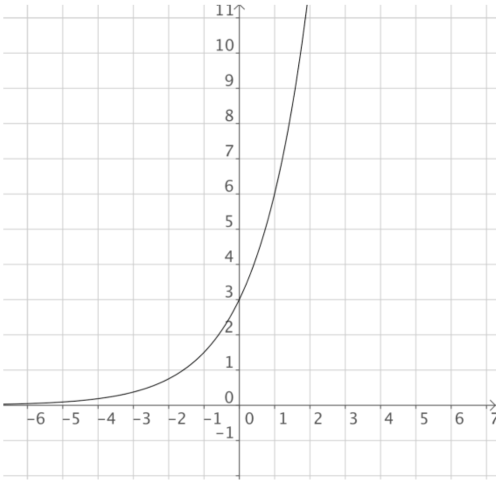
2)



3)

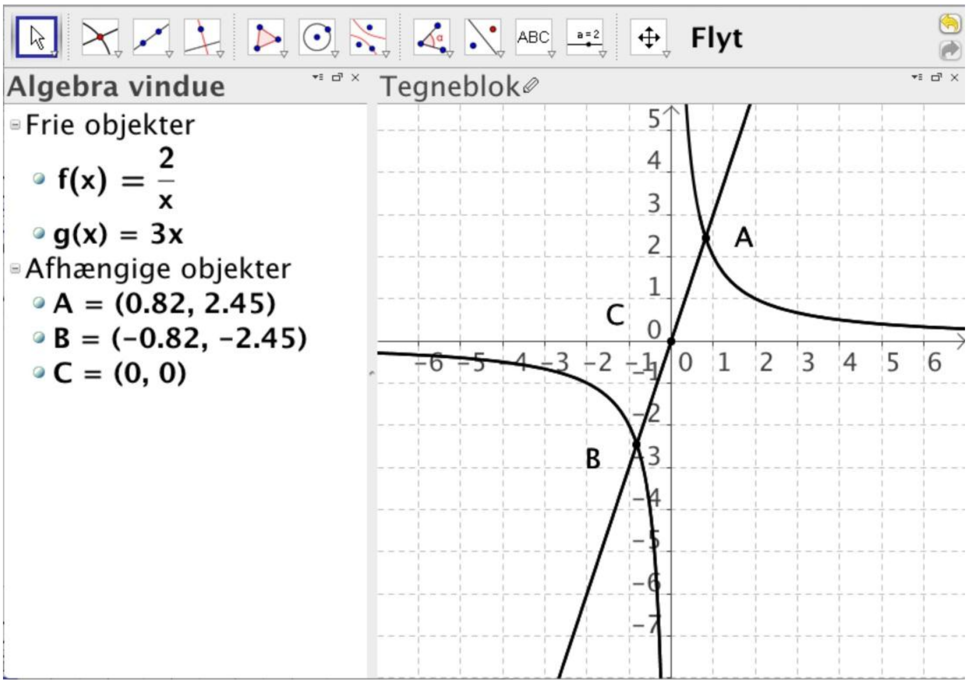


4)

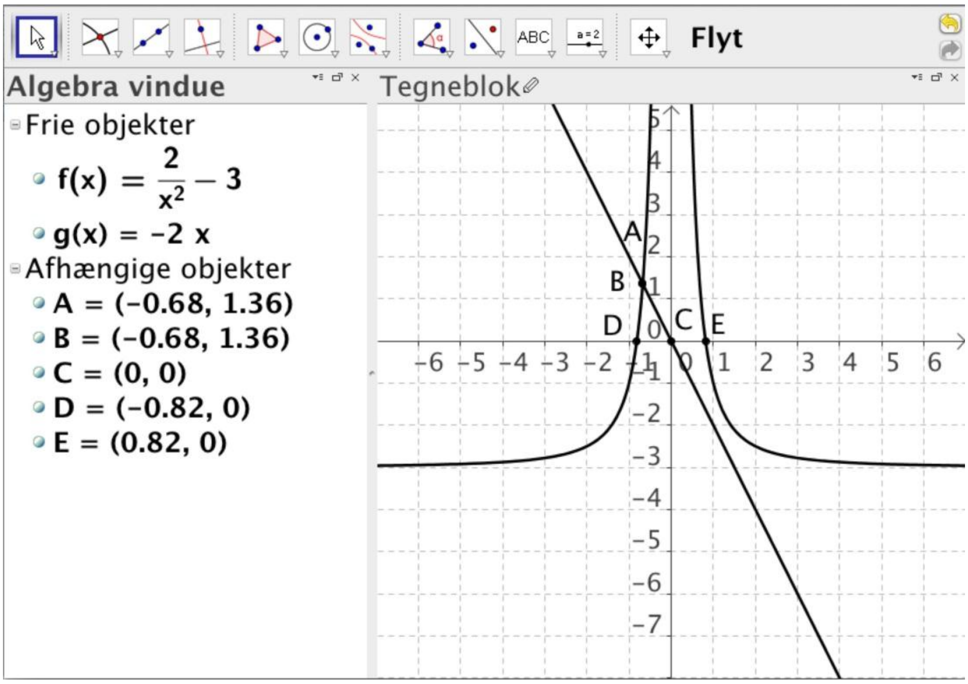


Øvelse 8

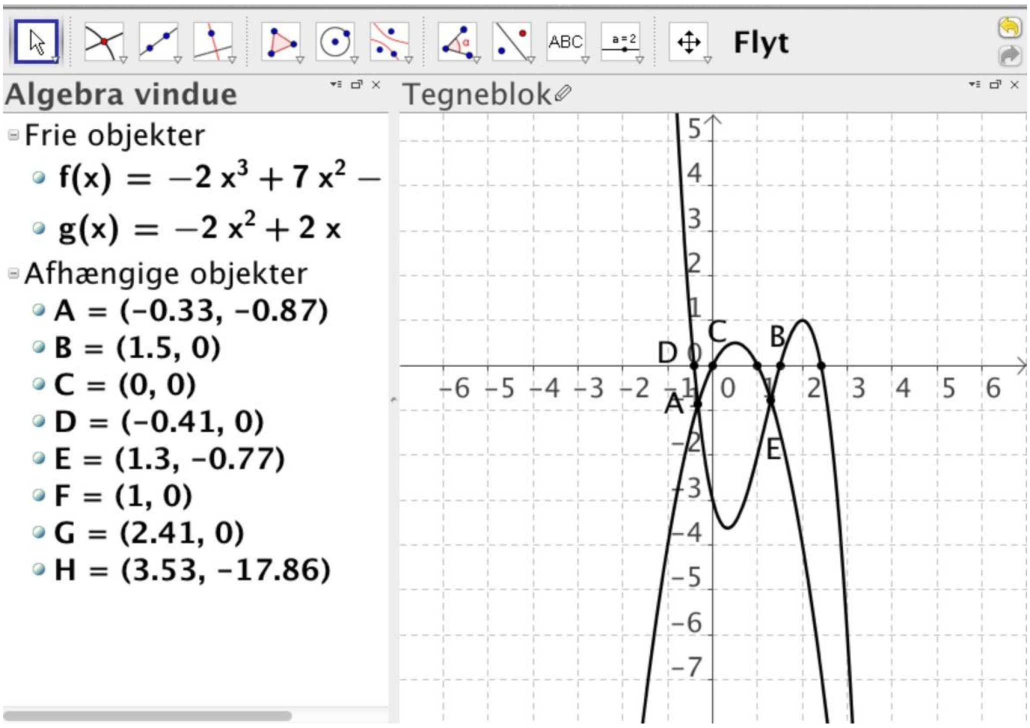
1)


Flyt
Algebra vindue
Tegneblok
Frie objekter
f(x) = 2/x
g(x) = 3x
Afhængige objekter
A = (0.82, 2.45)
B = (−0.82, −2.45)
C = (0, 0)
A
B
C

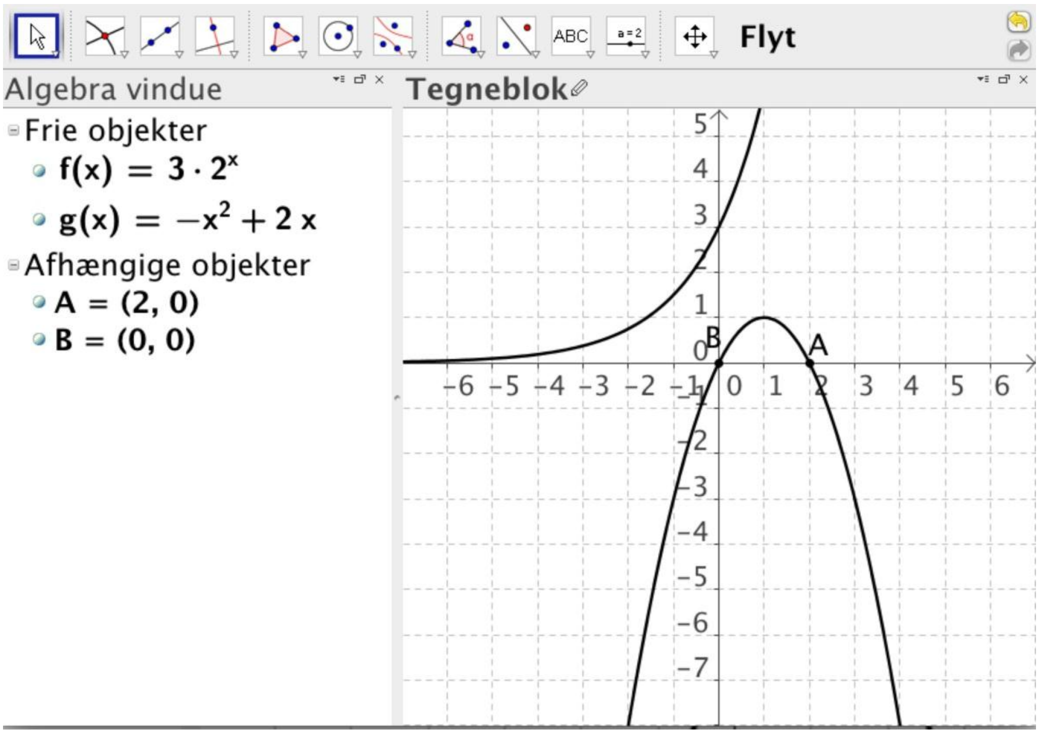
2)


Flyt
Algebra vindue
Tegneblok
Frie objekter
f(x) = 2/x² − 3
g(x) = −2 x
Afhængige objekter
A = (−0.68, 1.36)
B = (−0.68, 1.36)
C = (0, 0)
D = (−0.82, 0)
E = (0.82, 0)
A
B
C
D
E

3)

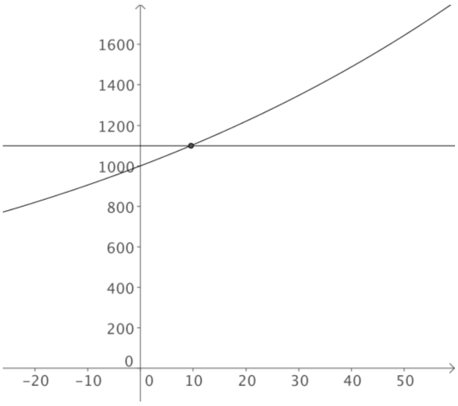

Flyt
Algebra vindue
Tegneblok
Frie objekter
f(x) = −2 x³ + 7 x² −
g(x) = −2 x² + 2 x
Afhængige objekter
A = (−0.33, −0.87)
B = (1.5, 0)
C = (0, 0)
D = (−0.41, 0)
E = (1.3, −0.77)
F = (1, 0)
G = (2.41, 0)
H = (3.53, −17.86)

4)


Flyt
Algebra vindue
Tegneblok
Frie objekter
f(x) = 3 · 2ˣ
g(x) = −x² + 2 x
Afhængige objekter
A = (2, 0)
B = (0, 0)

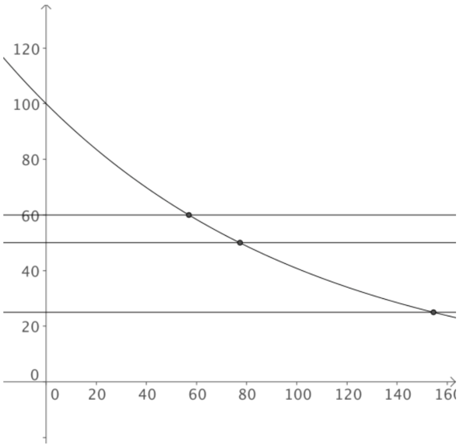
Øvelse 9

1)



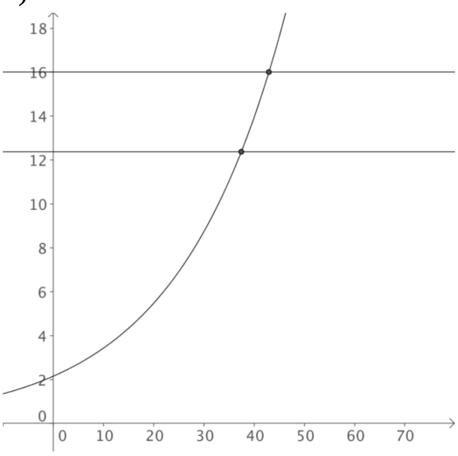
Der går 9,58 år, altså efter 10 år er der mere end 1100 kr.

2)



Efter 77,27 dage er der 50 % tilbage.
Efter 56,95 dage er der 60 % tilbage.
Efter 154,55 dage er der 25 % tilbage.

3)



Når x = 37,44 siger modellen, at der er 12,37 millioner. Det svarer til midt i år 2007.
Når x = 42,94 siger modellen, at der er 16 millioner. Det svarer til udgangen af år 2012.

Kapitel 5 Problemløsning

Øvelse 1
1)
Rumfanget af de to pakker er hhv. 224 cm^3 og 540 cm^3. Prisen pr. cm^3 søm er derfor henholdsvis 0,246 kr. og 0,176 kr. Den dyreste pakke har den mest fordelagtige pris, hvis man ellers har brug for alle de søm.

2)
Areal, der skal ferniseres: $8{,}5 \cdot 6{,}4 = 54{,}40$ m^2.

Areal af vinduer og døre: $0{,}75 \cdot 54{,}40 = 40{,}80$ m^2.

Areal af vinduer og døre, der skal fratrækkes den del af væggen, som skal males: 20,40 m^2.

Areal der skal hvidtes: $8{,}5 \cdot 6{,}4 + 2 \cdot (8{,}5 + 6{,}4) \cdot 1{,}75 – 20{,}40 = 86{,}15$ m^2.

Vægareal der skal males: $2 \cdot (8{,}5 + 6{,}4) \cdot 1{,}55 – 20{,}40 = 25{,}79$ m^2.

Udgifter til maling af vægge, hvidtning og fernisering:
$25{,}79 \cdot 3{,}20 + 86{,}15 \cdot 1{,}25 + 54{,}40 \cdot 1{,}35 = 263{,}66$ kr.

Maling af døre og vinduer: $1{,}25 \cdot 263{,}66 = 329{,}58$ kr.

Samlet pris: 593,24 kr.

Øvelse 2
16.100 kr.

42.452,76 kr.

Øvelse 3
BD er en højde, *BE* er en median, *CG* er en vinkelhalveringslinje og *EF* er en midtnormal.

Hvis trekanten var ligesidet, ville alle linjerne være både højde, median, vinkelhalveringslinje og midtnormal.

Øvelse 4
Den store cirkel er den omskrevne cirkel. Den har centrum i midtnormalernes skæringspunkt.

Den lille cirkel er den indskrevne cirkel. Den har centrum i vinkelhalveringslinjernes skæringspunkt.

Øvelse 5

$\frac{6000\,\text{m}}{5000} = 0{,}12\text{m} = 12\text{ cm}$

Øvelse 6

Terningen er symmetrisk, og man kan derfor have en forventning om, at alle 6 sider skal være lige sandsynlige. På den måde får man en teoretisk sandsynlighed på $\frac{1}{6}$ for hver side.

Tændstikæsken er ikke symmetrisk, og det er heller ikke forholdet mellem sidefladernes arealer, der er afgørende for, hvor hyppigt de forskellige sider er opad. Man må udføre et eksperiment for at bestemme sandsynlighederne.

Øvelse 7

Middeltal = 7,64
Typetal = 10
Median = 7

Øvelse 8

Næppe. Terningen vil veje $20^3 \cdot 19{,}3 = 154400\,\text{g} = 154{,}4\,\text{kg}$.

Øvelse 9

1) 150 decigram = 15 gram og 0,001 kg = 1 g.

2) Ja, 5 m/s = 18 km/t.

3) 4000 – eller måske 4096 (hvis man arbejder i totalssystemet, hvor 1 kilo = 2^{10}=1024, se fx http://www.unitconversion.org)

Øvelse 10

1) Søg selv.

2)

Kvotientrække: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...$
Differensrække: $2+4+6+8+10+...$
Fuldkomment tal: 28
Tal med tværsum 19: 2728

Øvelse 11

1)

Det er flot, hvis du har fundet tallet 3.
Her er alle divisorer under 100 i det store tal: 2, 3, 4, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 21, 23, 24, 26, 28, 39, 42, 46, 48, 52, 56, 69, 78, 84, 91, 92.

2)
Hvis n er lige, er det fordi n kan skrives som $2 \cdot m$ for et eller andet helt tal m. Det ses derfor, at 2 går op i et lige tal.

3 går op i hvert tredje tal i den naturlige talrække (tretabellen). Derfor går 3 op i mindst et af de tre på hinanden følgende tal som det store tal er sammensat af.

3)
3 går op igen, fordi 3 går op i et af disse tre på hinanden følgende tal (lad os kalde det x), og de to andre vil tilsammen også være delelige med tre.

Hvis fx x er lig det første tal, som det faktisk er, så hedder de to næste tal $x + 1$ og $x + 2$, der sammen med x giver $3x + 3$, der klart kan deles med 3. Tilsvarende hvis x er det midterste tal, for så bliver de tre tal: $x – 1$, x og $x + 1$, der tilsammen giver $3x$, der er delelig med 3.

17 er i øvrigt også divisor i m, men det kræver lidt mere direkte regning at finde ud af det.

4)
Argumenterne overfor kan overføres til vilkårligt valg af tre på hinanden følgende tal. Derfor vil såvel deres produkt som deres sum være delelig med 3.

Øvelse 12
1)
Udfaldene (de mulige summer) er nu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18. Det vil sige, der er 16 forskellige udfald.

2)
3 og 18 forekommer kun i 1 af 6·6·6 = 216 muligheder. Sandsynlighed for 3 og 18 er $\frac{1}{216}$.

2, 1, 1 og 1, 2, 1 og 1, 1, 2 er de tre muligheder, der giver 4: Sandsynlighed for 4 er $\frac{3}{216}$. Det er også sandsynligheden for 17.

Øvelse 13
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}-n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}-\frac{2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{2n}{2}=\frac{n^2+n-2n}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$$

Øvelse 14

1)

antal hegn	1	2	3	4	5	6	7	8
max antal marker	2	4	7	11	16	22	29	37

Leger man lidt med at tegne linjerne, opdager man måske, at *n* linjer kan give
1 + (1 + 2 + 3 + 4 + … + *n*) marker, eller ifølge den formel der er fundet på Wikipedia $\frac{n\cdot(n+1)}{2}+1$.
Dette giver 211 marker, hvis $n = 20$.

Øvelse 15

Formel for løsningen er $\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2\cdot(n^2+2n+1)}{4}=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

Når $n = 100$ får man 25.502.500.

Øvelse 16

Antallet af krone	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Sum
Antallet af mønter												Antallet af grene
1	1	1										2
2	1	2	1									4
3	1	3	3	1								8
4	**1**	**4**	**6**	**4**	**1**							**16**
5	1	5	10	10	5	1						32
6	1	6	15	20	15	6	1					64
7	1	7	21	35	35	21	7	1				128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1			256
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		512
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	1024

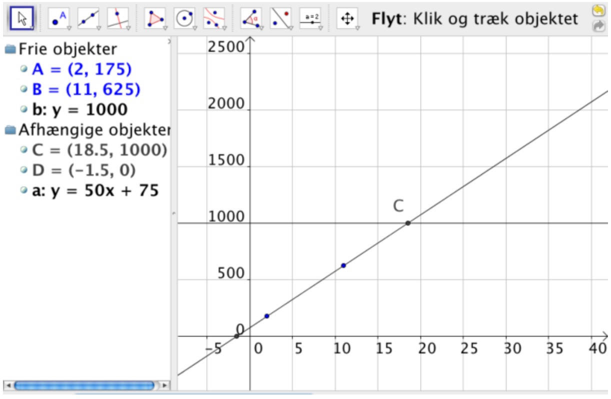
Man kan opdage det mønster, at ethvert tal i tabellen er lig med summen af tallet over og det til venstre for tallet over, idet blanke felter regnes for 0. Dette mønster har navnet Pascals Trekant efter den første, der skrev en længere afhandling om det.

Kapitel 6 Modellering

Øvelse 1

1)

Vi har tegnet problemet grafisk ind med Geogebra:

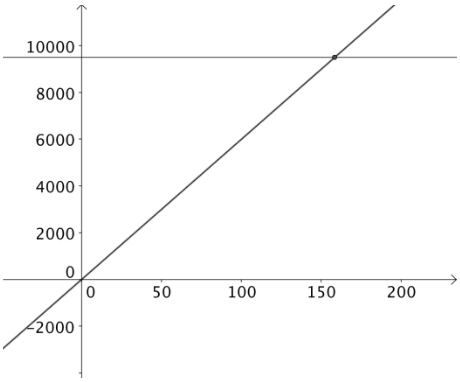


Der forventes at være 1000 kr. efter 18,5 måneder, svarende til 15. juli 2012.

Modellen siger, at beløbet er 0 når x = -1,5 svarende til midt i november 2010.

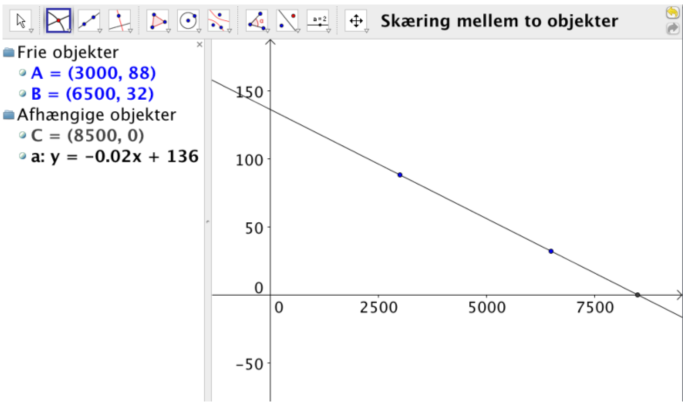
2)

x betegner antallet af uger efter 1/8 2011. Modellen for opsparingen er så $y = 60x$.



Modellen viser, at der går 158,33 uger, det vil sige 159 uger, inden der er sparet 9500 kr. op. Der går altså 3 år og 3 uger, svarende til udgangen af august 2014.

Øvelse 2



Modellen siger, at der ikke længere vil forekomme fugle i 8.500 meters højde.

Øvelse 3

1)

Diameteren på 5-kronen måles til 28,5 mm. Med måleusikkerheden kan man sige, at den sande diameter ligger mellem 28 mm og 29 mm.

Arealet kan derfor bestemmes til et sted mellem 615,8 mm^2 og 660,5 mm^2. Med et enkelt tal: 638,15 mm^2 ± 22,35 mm^2 eller mere overskueligt og hæderligt 640 mm^2 ± 20 mm^2.

Den mindste værdi (inden for målenøjagtigheden) for 1-kronens areal er 330 mm^2, og den største værdi for 5-kronens areal er 660 mm^2, så det er muligt, men nok ikke særlig sandsynligt, at 5-kronens areal er dobbelt så stort.

2)

Arealet ligger mellem 95·57 m^2 og 105·63 m^2. Det vil sige mellem 5415 m^2 og 6615 m^2.
6015 m^2 ± 600 m^2 eller unøjagtigheden taget i betragtning 6000 m^2 ± 600 m^2.

3)

Rumfanget ligger mellem 4,9·6,9·2,9 cm^3 og 5,1·7,1·3,1 cm^3. Det vil sige mellem 98,049 cm^3 og 112,251 cm^3. Altså 105,15 cm^3 ± 7,1025 cm^3, afrundet: 105 cm^3 ± 7 cm^3

Arealet af overfladen ligger mellem 2·4,9·6,9 + 2·4,9·2,9 + 2·6,9·2,9 cm^2 og 2·5,1·7,1 + 2·5,1·3,1 + 2·7,1·3,1 cm^2. Det vil sige mellem 136,06 cm^2 og 148,06 cm^2, altså 142 cm^2 ± 6 cm^2.

4)
Individuelt svar, men for de almindeligste små Tordenskjoldtændstikker er det med en målenøjagtighed på $\frac{1}{2}$ mm ca. $2\frac{1}{2}\cdot 2\frac{1}{2}\cdot 47\frac{1}{2}$ mm^3 $=300$ mm^3 ± 130 mm^3.

5)
Den samlede vægt af de øvrige personer er 440 kg. Antag, at de kender deres vægt med 5 kg nøjagtighed (der er jo også tøj mm., der vejer til), så kan vægten af de øvrige passagerer bestemmes til 440 kg ± 50 kg.

Hvis alle konsekvent angiver vægten 5 kg for lavt, bliver den samlede vægt 490 + 62 = 552 kg. Det er en overskridelse af maksimalvægten på ca. 10 %, hvilket ikke burde være et problem med de sikkerhedsmargener, man plejer at regne med. Desuden er det usandsynligt, at alle kommer til at angive deres vægt for lavt, da nogle badevægte vil vise for lidt og andre for meget. Men en meget forsigtig person vil nok vente til næste elevator.

Øvelse 4
1)
$\frac{150}{84}=\frac{x}{7}$ eller $x=7\cdot\frac{150}{84}=12,35$. Prisen bliver 12,35 kr.

2)
$\frac{26,25}{138,60}=\frac{x}{52,80}$ eller $x=52,80\cdot\frac{26,25}{138,60}=10$. A fik 10 meter.

3)
På 24 minutter fylder A, B og C tilsammen 3 + 2 + 1 = 6 beholdere af den givne størrelse. Det tager derfor $\frac{24}{6}=4$ minutter at fylde én beholder i fællesskab.

4)
$360\cdot 40=x\cdot 45$ eller $x=\frac{360\cdot 40}{45}=320$. Altså 320 sider.

Øvelse 5
1) $6=R\cdot 2$ eller $R=3$. Modstanden er 3 Ohm.

2) $12=3\cdot I$ eller $I=4$. Strømstyrken er 4 A.

3) $V=3\cdot\frac{1}{2}=1,5$. Spændingen skal være 1,5 V.

Øvelse 6

1)

$50 \text{ km/t} = \frac{50 \cdot 1000}{3600} \text{ m/s} = 13,89 \text{ m/s}$. Bilen kører 138,9 meter.

2)

1 minut 41,11 sekunder = 101,11 sekunder. Hastigheden er så $\frac{800}{101,11} = 7,91 \text{ m/s}$.

$7,91 \text{ m/s} = \frac{7,91 \cdot 3600}{1000} \text{ km/t} = 28,48 \text{ km/t}$. Hastigheden er under 50 km/t.

3)

Kører man fx 90 km med 90 km/t tager det 1 time.
Halvdelen af 90 km er 45 km. Hvis 45 km tilbagelægges med 50 km/t tager det 54 minutter. Hvis gennemsnittet skal holdes, skal de sidste 45 km tilbagelægges på 6 min, svarende til en hastighed på 450 km/t.

Hvis strækningen er 2*s* tilbagelægges den ene halvdel, *s* km, med en fart af 50 km/t. Det tager $\frac{s}{50}$ time. Anden halvdel af strækningen tilbagelægges på $\frac{s}{130}$ time. I alt tager det

$\frac{s}{50} + \frac{s}{130} = \frac{13s}{650} + \frac{5s}{650} = \frac{18s}{650}$ timer.

Gennemsnitsfarten er derfor $\frac{2s}{\frac{18s}{650}} = \frac{2s \cdot 650}{18s} = 72,22$ km/t.

Øvelse 7

1) 37,1

2) 38

3) 37,9

4) Det ser rimeligt ud.

5) Løbe 2332 meter, en puls på 147 og en belastning på 205.

6) En puls omkring 141 og en belastning på ca. 250

Øvelse 8

1) $F = 1,8C + 32$ eller $C = \frac{F-32}{1,8} = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

2) 50° F svarer til 10° C, hvilket de fleste finder for koldt.

Øvelse 9

1) Den rette linje har en hældningskoefficient på $\frac{0-3000}{80-20} = -50$, ligningen er $a = -50x + b$, b bestemmes ved at indsætte (80,0) i ligningen:

$0 = -50 \cdot 80 + b$
$b = 4000$

Hermed har vi vist, at afsætning som funktion af prisen er $a = 4000 - 50x$.

2) Omsætning er lig med antal solgte stykker (afsætningen) gange pris pr. styk, altså $a \cdot x$. Indsættes $a = 4000 - 50x$ fås hermed, at omsætningen er lig $(4000 - 50x) \cdot x$.

3) I et regneark skrives pris pr. styk i første søjle, afsætning i anden søjle og samlet omsætning i tredje søjle.

Her vises et påbegyndt regneark med formler.

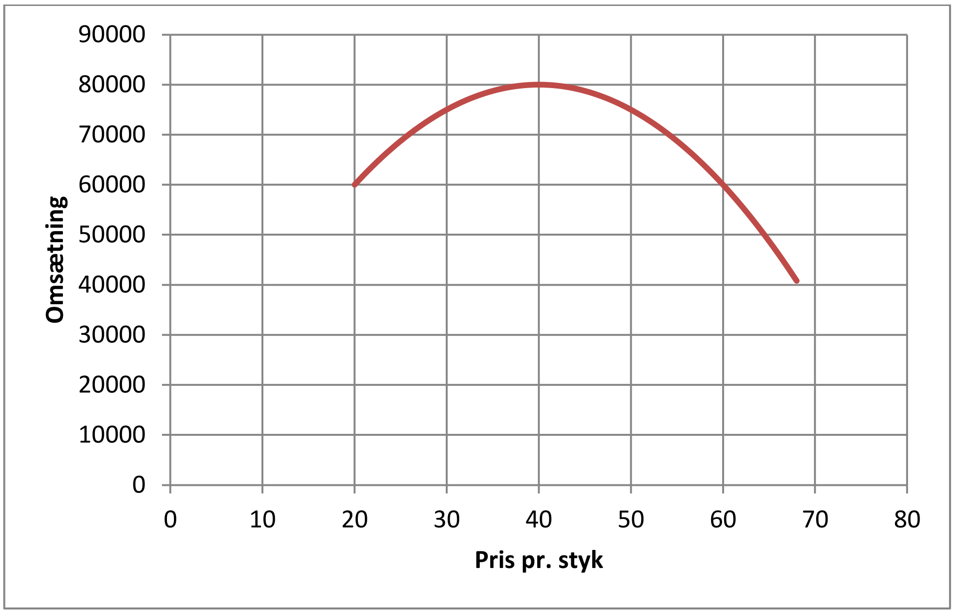
	A	B	C
1	Pris pr. styk (x)	Afsætning (a styk)	Omsætning
2	20	=4000-50*A2	=A2*B2
3	21	=4000-50*A3	=A3*B3
4	22	=4000-50*A4	=A4*B4
5	23	=4000-50*A5	=A5*B5
6	24	=4000-50*A6	=A6*B6
7	.	.	.
8	.	.	.
9	.	.	.

På næste side vises regnearket, hvor resultaterne kan aflæses.

	A	B	C
1	Pris pr. styk (*x*)	Afsætning (*a* styk)	Omsætning
2	20	3000	60000
3	21	2950	61950
4	22	2900	63800
5	23	2850	65550
6	24	2800	67200
7	25	2750	68750
8	26	2700	70200
9	27	2650	71550
10	28	2600	72800
11	29	2550	73950
12	30	2500	75000
13	31	2450	75950
14	32	2400	76800
15	33	2350	77550
16	34	2300	78200
17	35	2250	78750
18	36	2200	79200
19	37	2150	79550
20	38	2100	79800
21	39	2050	79950
22	**40**	**2000**	**80000**
23	41	1950	79950
24	42	1900	79800
25	43	1850	79550
26	44	1800	79200
27	45	1750	78750
28	46	1700	78200
29	47	1650	77550
30	48	1600	76800
31	49	1550	75950
32	50	1500	75000
33	51	1450	73950
34	52	1400	72800
35	53	1350	71550
36	54	1300	70200
37	55	1250	68750
38	56	1200	67200

Den største omsætning i kroner aflæses til 80.000 kr. ved en stykpris på 40 kr., der giver en afsætning på 2.000 stk.

Hvis man indsætter et diagram i regnearket, kan det samme resultat aflæses.



4) Nej, virksomheden skal også tage hensyn til produktionsomkostningerne.

Øvelse 10

Der er to store problemer undervejs. Det ene er omsætningen fra mg til g, og det andet er at observere, at det kun er $\frac{1}{9}$ af den indsamlede honning, der kan høstes.

Strategi:
Beregn, hvor meget nektar en bi indsamler på 21 dage.
Omsæt det til honning, og lav enheden om til gram, da honningbægerets indhold er målt i gram.
Bestem, hvor mange gram honning der kan høstes af den mængde, en bi indsamler på 21 dage.
Bestem antallet af bier, der skal til.

I alt indsamler en bi $14 \cdot 70 \cdot 21 = 20580 \text{ mg}$ nektar på 21 dage.

Det giver $\frac{20580}{2} \text{ mg} = 10290 \text{ mg} = 10,29 \text{ g}$ honning.

Af disse 10,29 g honning pr. bi kan man kun høste $\frac{1}{9}$ svarende til 1,14 g pr. bi.

Der skal derfor benyttes $\frac{450}{1{,}14} = 394,7 \approx 395$ bier i 21 dage for at samle ind til et bæger honning.

Øvelse 11

Da der til sidst er lige så meget vand i de to spande som til at begynde med, må den mængde østersøvand, der mangler i spanden med vand fra Østersøen, være erstattet med vand fra Vesterhavet og vice versa. Der er derfor lige store mængder fremmed vand i hver af de to spande.