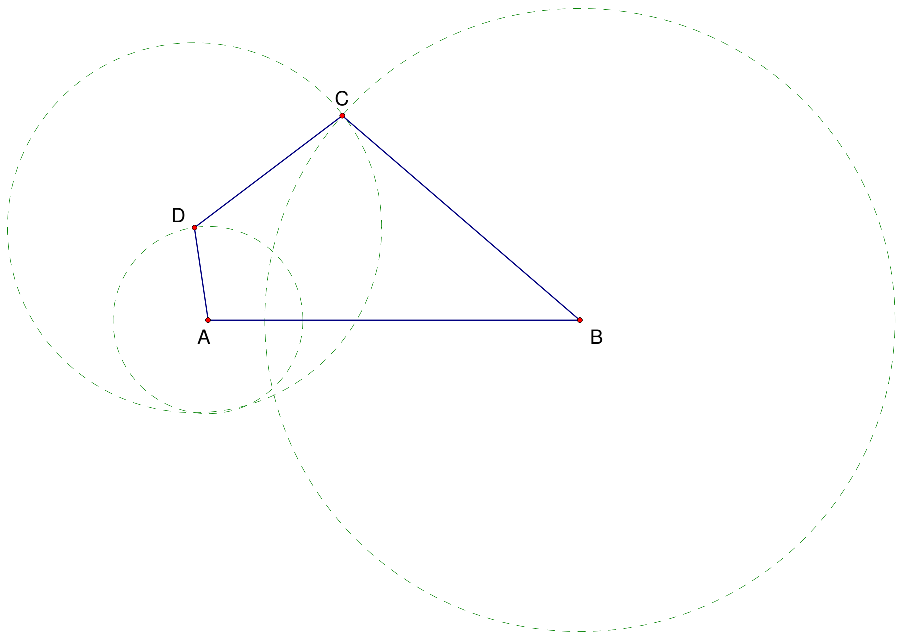
1. Eksperimenterende geometri og måling

Undersøgelse 1
Undersøgelsen drejer sig om det såkaldte *Firfarveproblem*. For mere end 100 år siden fandt man ved sådanne undersøgelser frem til, at fire farver er nok til at farve ethvert tænkeligt landkort, uden at nogen nabolande får den samme farve.

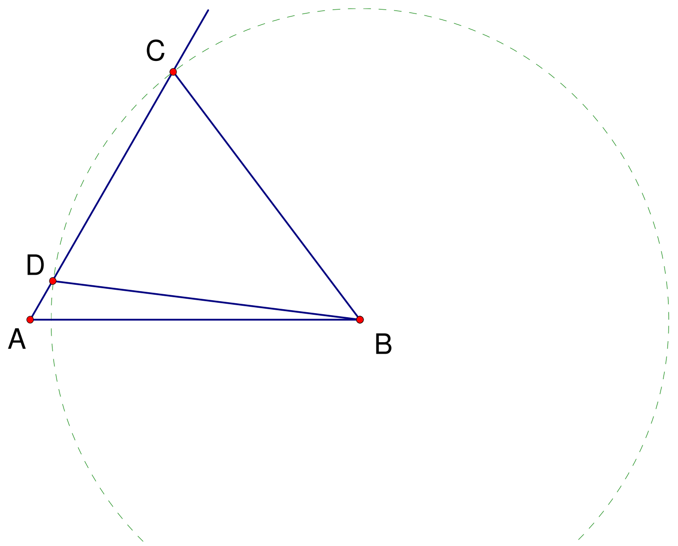
For uddybning se:
http://en.wikipedia.org/wiki/Four-Colour_Map_Problem (Lokaliseret juni 2007)

Øvelse 2
3) Der er uendeligt mange løsninger. Den viste er fundet ved at afsætte et linjestykke *AB* på 20 cm, tegne en cirkel med centrum i *B* og radius 17 cm, tegne en cirkel med centrum i *A* og radius 5 cm. Dernæst bestemmes to punkter *C* og *D* på de to cirkelperiferier, hvor afstanden er 10 cm, idet man vælger *D* på den lille cirkel og bruger *D* som centrum for en cirkel med radius 10 cm, som skærer den store cirkel i *C*.



Øvelse 3

5) Linjestykket AB lig 100 mm afsættes, og vinkel A lig 60° afsættes. Vinklens venstre ben forlænges til skæring med en cirkel, der har centrum i B og radius 94 mm, hvorved skæringspunkterne C og D fremkommer. Altså er der to løsninger.



Undersøgelse 4

1) Gårdejerne søger et punkt P med samme afstand til alle gårdene A, B og C. Da punktet P skal have lige stor afstand til A og B, må det ligge på midtnormalen for AB og tilsvarende for de øvrige siders midtnormaler. P er derfor skæringspunktet mellem midtnormalerne til linjestykkerne AB, BC og AC. Der er altså kun ét punkt med den søgte egenskab, når man ser strengt geometrisk på det.

Spørgsmålet er imidlertid, om denne løsning er den smarteste. Det kunne være billigere at minimere den samlede rørlængde hen til brønden, altså $AP + BP + CP$, og dette ville give en anden placering, som man kan eksperimentere sig frem til ved at tegne og måle (eller ved at bruge målefunktionen i et geometrisk tegneprogram) og så flytte P rundt, indtil man får den mindste værdi for $AP + BP + CP$. Det viser sig, at positionen udmærker sig ved, at vinklerne mellem de fra P udløbende rør er lige store og altså 120°.

2) Grænserne for den enkeltes arbejdsmark udgøres af midtnormalerne til linjestykkerne AB, BC og AC.

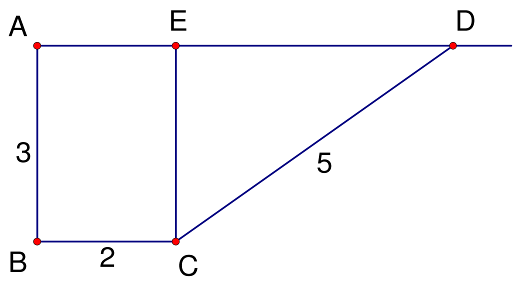
Øvelse 5

3) Denne øvelse er meget svær, og vi bringer ikke en løsning, men henviser til Georg Mohr's bog: Euclides Danicus: Amsterdam 1672. Med et forord af Johannes Hjelmslev, udgivet af Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab - Facsimile-udgave - København: Høst, 1928.

Opgave 3

Vinkel A lig 90˚ afsættes. Punktet B afsættes 3 cm ud ad højre ben. Det er oplyst, at BC er parallel med AD, hvilket medfører, at vinkel B er 90˚. Punktet C afsættes 2 cm ud ad vinkel B*'s* højre ben. For at kunne bestemme længden AD oprejses den vinkelrette på BC i punktet C. Skæringspunkt med AD kaldes E. Længden EC er 3 cm, da EC er parallel med AB, og begge linjestykker står vinkelret på BC, så $ABCD$ er et rektangel.

Vi kan nu bestemme længden af AD, idet trekant ECD udgør en retvinklet trekant, hvor to sider er kendte. Vha. den pythagoræiske sætning fås, at $EC^2 + ED^2 = CD^2$ eller $3^2 + ED^2 = 5^2$ eller $ED = 4$. Altså er $AD = AE + ED = 6$ cm.

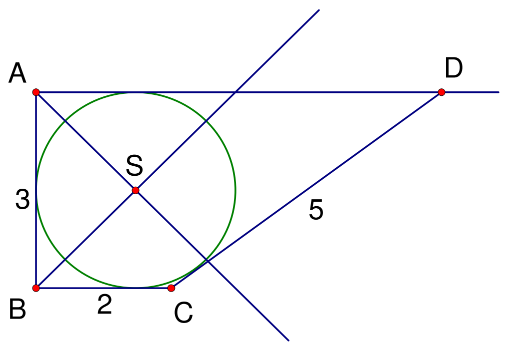


Opgave 3 fortsat

Cirklens centrum bestemmes som nogle vinkelhalveringslinjers skæringspunkt, jf. vinkelhalveringslinjernes egenskab som geometrisk sted. Vinkel A's og B's vinkelhalveringslinjer konstrueres, og deres skæringspunkt udgør cirklens centrum, S.

Radius er lig ½ · $|AB|$ = 1,5 cm. Den ønskede cirkel tegnes med centrum i S og radius 1,5 cm.

NB. Konstruktionen sikrer ikke, at CD også er tangent til cirklen.

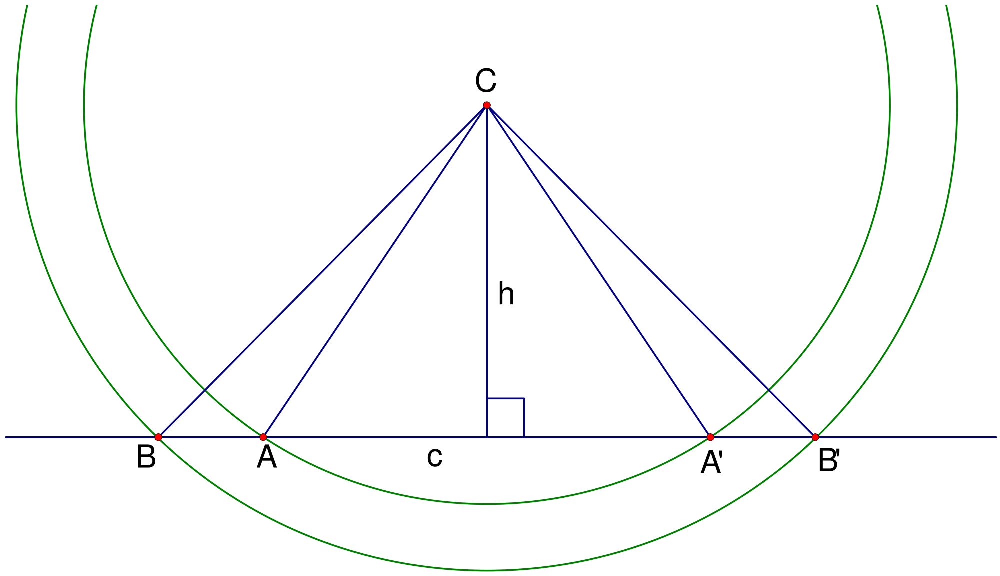


Opgave 4

1) Linjen *c* tegnes. Punktet *C* afsættes i en afstand på 10 cm fra *c*. Højden h_c afsættes.

Med centrum i *C* og radius 12 cm tegnes en cirkel. Skæringspunkterne med *c* betegnes *A* og *A'*. Tilsvarende tegnes en cirkel med centrum i *C* og radius 14 cm. Skæringspunkterne med *c* betegnes *B* og *B'*.

Der er således fire løsninger: $\triangle ABC$, $\triangle AB'C$, $\triangle A'B'C$ og $\triangle A'BC$, de er dog to og to kongruente.



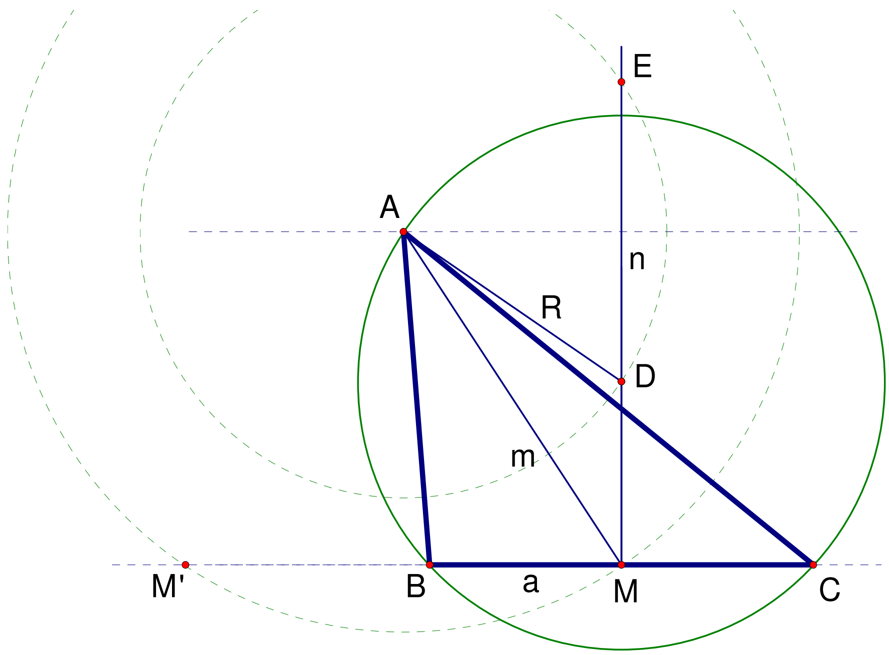
Opgave 4 fortsat

Inspireret af at h_a er lig 10 cm tegnes to parallelle linjer med afstand 10 cm, den nederste kaldes *a*. På den øverste vælges et punkt som *A*. Med *A* som centrum og radius 12 cm tegnes en cirkel, denne skærer *a* i to punkter, *M* og *M'*, det giver to løsninger, her viser vi kun den ene. Skæringspunktet *M* udgør midtpunkt på *BC*.

Om *B* og *C* ved vi kun, at de skal ligge på *a*. Men vi ved, at den omskrevne cirkel har midtnormalernes skæringspunkt som centrum, derfor tegnes midtnormalen *n* til *BC*. For at finde centrum for den omskrevne cirkel tegnes en cirkel med centrum i *A* og radius 8 cm. Cirklen skærer *n* i to punkter *D* og *E*, et af disse udgør centrum. *E* kan ikke bruges, da en cirkel med radius 8 cm og centrum i *E* ikke kan nå *a,* hvor *B* og *C* skal ligge, altså er *D* centrum.

Med centrum i *D* og radius 8 cm tegnes en cirkel, hvor denne skærer *a,* har vi *B* og *C*.

Havde vi benyttet *M'* havde vi fået en hermed kongruent trekant.

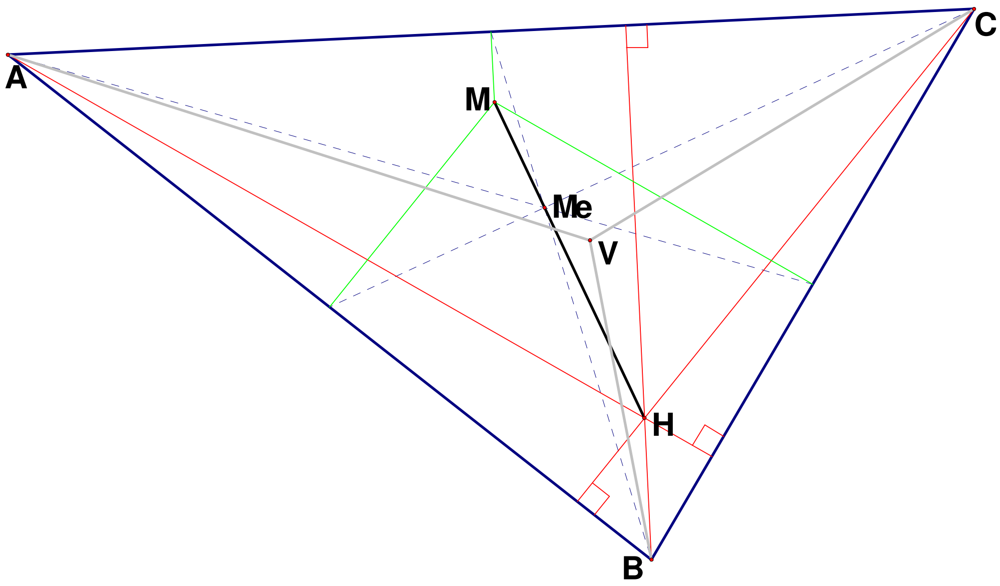


Undersøgelse 6
Det ligger i sagens natur, at en undersøgelse kan gå i mange retninger, men den kan fx forløbe således:

Man tegner den vilkårlig trekant *ABC* i et dynamisk tegneprogram og konstruerer de fire typer skæringspunkter, som vi har udnævnt til at være interessante i denne undersøgelse. Derefter sletter vi (eller dæmper grafisk) alle hjælpelinier, så vi ikke forstyrres af for megen information på tegningen. Nu kan vi benytte os af det, som udmærker et dynamisk tegneprogram: vi trækker i trekantens hjørner. Herved opdager vi med lidt held, at tre af de punkter, vi fokuserer på, ligger på linje.

Det drejer sig om medianernes skæringspunkt *Me,* midtnormalernes skæringspunkt *M,* og højdernes skæringspunkt *H* , hvis vi da ikke har valgt trekanten så symmetrisk, at de er sammenfaldende. Vinkelhalveringsliniernes skæringspunkt synes ikke at passe pænt ind i mønsteret, så det udelader vi i den resterende undersøgelse.

Linjen gennem *M, Me* og *H* kaldes trekantens Euler-linje. Vi observerer desuden, at punktet *Me* altid ligger midterst af de tre punkter. Benyttes målefunktionen i tegneprogrammet, opdager man måske også, at *HMe* altid er dobbelt så lang som *MMe*. Dette er indholdet i Eulers opdagelse omkring disse tre punkter. Vi vil i denne fase slet ikke komme ind på et bevis for sætningen.



Undersøgelse 11
Undersøger man en række eksempler på den type graf, vi har kaldt for træer, vil man nok bemærke, at antallet af punkter hele tiden er 1 større end antallet af grene, her kaldet kanter. Det fører os frem til en sætning, der gælder for alle træer og som lyder:

For en graf af form som et træ er antallet af punkter lig med antallet af kanter + 1.

Et argument for sætningen kan fx lyde således: Enhver kant slutter i et punkt, hvortil kommer begyndelsespunktet.

Undersøgelse 14
Denne undersøgelse er så righoldig, at man kan kalde den for et helt undersøgelseslandskab. Det er hindrende for arbejdet i et undersøgelseslandskab, hvis man tror, at man skal nå frem til en række rigtige svar. Derfor bør man så sent som muligt i arbejdet opsøge det følgende forslag til besvarelser.

De første svar er ret sikre og lukkede, men senere folder undersøgelsen sig ud og kan føre mange andre steder hen.

1)
Efter at Saskia har udpeget et tilfældigt punkt *A*, lægger Mikkel sit snit, så det svarer til diameteren på kagen. Mikkel skærer blot gennem *A* og cirklens centrum *C*. Hermed er Mikkel sikret halvdelen.

2)
Kun hvis Saskia udpeger kagens centrum *C* som det punkt, Mikkel skal skære igennem, kan hun være sikker på at få halvdelen. For enhver ret linje, der tegnes gennem *C,* er en diameter.

3a)
Ligegyldigt hvilket punkt *A*, som Saskia vælger, kan Mikkel lægge et snit gennem *A*, der opdeler trekanten i to lige store stykker og dermed sikre sig at få halvdelen af kagen. Grunden hertil er kort sagt, at hvis Mikkel i en givet snit får, at kagedelen til venstre for kniven er mindre en kagedelen til højre for kniven, så vil han ved at dreje kniven 180° få den modsatte situation, hvor arealet til venstre er større end arealet til højre, for de to dele har byttet rolle ved en drejning af kniven på 180°.

Udtrykt mere præcist lægger vi kompasretninger ind over opgaven, så vi entydigt kan karakterisere Mikkels snit ud fra kompasretningen *v*. Kalder vi arealet på venstre side af kniven for $f(v)$, så er arealet på højre side $f(v+180°)$, så $f(v)+f(v+180°)=1$ udgør hele arealet. Heraf ses, at med mindre $f(v)$ er den konstante funktion ½, så er den sommetider større end ½ og sommetider mindre end ½. Da det er intuitivt klart, at *f* er en kontinuert funktion, må den ifølge sætning 1 antage værdien ½ for en eller anden værdi af *v*.

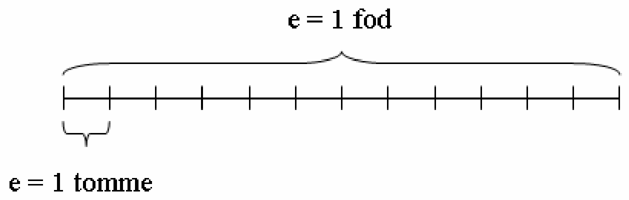
3b)
Nej, Saskia må nøjes med en fjerdedel af kagen. For selv hvis hun vælger trekantens 'centrum', altså fx midtnormalernes skæringspunkt som *A*, så kan Mikkel ved at skære gennem *A* parallelt med en af trekantens sider dele trekanten i ¼ og ¾ . Da han må vælge først, sikrer han sig ¾.
Hvis Saskia ikke vælger trekantens 'centrum' som sit *A*, kan Mikkel tvinge hende til at få en endnu mindre del ved at skære en lille trekant af i det hjørne, som *A* ligger nærmest på (eller et af hjørnerne, hvis *A* ligger lige langt fra de to nærmeste).

4a)
Argumentet fra 3a kan overføres til en kage af vilkårlig form, da vi i argumentet i 3a) slet ikke benyttede, at der var tale om en trekant. Det kan ske, at kagen falder ud i flere stykker, hvis det er en kage med indhak (en såkaldt ikke-konveks kage), men i princippet burde Mikkel kunne sikre sig en samlet halvdel.

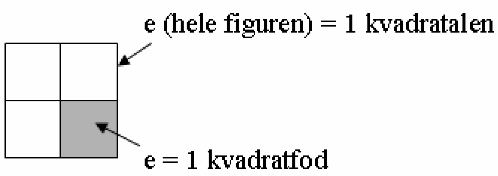
2. Areal

Opgave 4

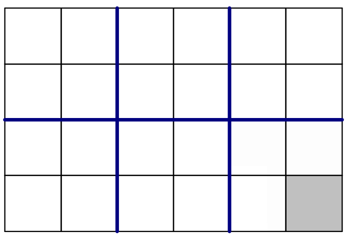
I oplægget til opgaven beskrives den omvendte proportionalitet mellem enhedens længde og måltallet i forbindelse med længdemål, fx at måltallet for en længde målt i fod vil være en $\frac{1}{12}$ af måltallet for den samme længde målt i tommer. Se figuren herunder.



1) Vi skal nu undersøge, om noget tilsvarende gør sig gældende for arealer. Lad os se på de gamle mål: fod og alen, hvor der går 2 fod på en alen.



Af figuren fremgår nu, at der går fire kvadratfod på en kvadratalen. Dvs. at når vi måler et areal ved hjælp af kvadratfod, så får vi et måltal, der er 4 gange så stort, som hvis vi måler med kvadratalen. Fx har nedenstående figur på 2x3 alen et areal på 6 kvadratalen svarende til 24 kvadratfod.



Vi kender det også med mm og cm, hvor der går 10 mm på 1 cm, mens der går 100 kvadratmillimeter på 1 kvadratcentimeter. Den bagvedliggende teori er den, der er udtrykt senere i sætning 5 i dette kapitel.

Men formlen $m = \frac{A}{e}$ gælder også for arealer. Hvis vi i stedet for at måle et givet areal A med e ønsker at anvende en anden enhed E, der er t gange større end e, altså $E = t \cdot e$, så kan vi bestemme de tilsvarende måltal M ved $M = \frac{A}{E} = \frac{A}{t \cdot e} = \frac{A}{e} : t = m : t$. Vi kan konkludere, at måltallet bliver t gange mindre, hvis måleenheden bliver t gange større.

Opgave 4 fortsat
2) Det gælder også for rumfang. Der gik i de gamle danske mål to potter til en kande. Så hvis en kroejer rådede over 150 potter øl, så blev det omsat til kander kun til 150 : 2 = 75 kander. Igen gælder det generelt, at hvis måleenheden bliver t gange større, så bliver det tilhørende måltal t gange mindre

Igen bliver det helt anderledes, hvis man laver sit rumfangsmål ud fra længdeenheder, fordi rumfang altid beregnes ved at tre længdeenheder ganges sammen, hvad enten det er ud fra kassens formel med længde gange bredde gange højde, eller det er ud fra kuglens rumfangsformel, hvor det er radius, man ganger med sig selv tre gange og desuden ganger med en passende konstant. Dette betyder, at ændringer i længdemålet slår igennem i tredje potens. Hvis vi altså har en terning med målene 1 m · 1 m · 1 m og dermed med rumfang 1 m^3, og vi ændrer længdemålene til centimeter, idet rumfanget så bliver 100 cm · 100 cm · 100 cm = 1.000.000 m^3.

3) I en skolesammenhæng er det vigtigst at fokusere på det elementære og centrale i første omgang. Dvs. at man ikke må komplicere sagen med, hvordan ændring i længdemål slår igennem i areal- og rumfangsmål. Det må komme til senere.

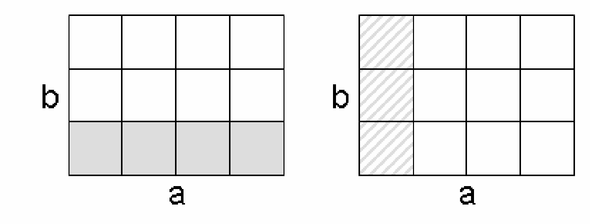
Det elementære ligger i betydningen af formlen $m = \frac{A}{e}$ altså i, at man finder måltallet ved at se, hvor ofte enheden kan tages ud af helheden. Kvadratalen og kvadratfod ligger nok lidt fjernt for eleverne, men man kunne få en tilsvarende diskussion frem i klassen ved at se på A5-papir og A3-papir, hvor eleverne hurtigt vil bemærke, at der går fire stykker A5 til et stykke A3. Her kunne så diskuteres, hvor mange stykker A5 der går på et areal, som man tidligere har målt til 12 stykker A3.

Øvelse 2
Figuren til venstre herunder illustrerer beviset for sætning 1A, hvor vi har vist, at arealet af rektanglet med længden a og bredden b er lig $b \cdot a$.

Vi vil nu bevise, at arealet af det samme rektangel er lig $a \cdot b$. Figuren til højre anvendes som illustration for beviset.

Vi vælger at se på bredden b og får, at der kan ligge netop b enhedskvadrater langs rektanglets bredde. Hvert af disse enhedskvadrater har ifølge arealaksiom 4 arealet 1, og derfor får hele søjlen af b enhedskvadrater ifølge arealaksiom 3 arealet 1 + 1 + … + 1 = b. Længden a angiver, hvor mange søjler af enhedskvadrater der skal til for at udfylde hele rektanglet, derfor bliver arealet af rektanglet ifølge arealaksiom 3 lig $\underbrace{b+b+...+b}_{\text{i alt } a \text{ gange}} = a \cdot b$.

Hermed har vi en god geometrisk og anskuelig forklaring på, at gange er kommutativ.



Den resterende del af opgaven overlades til læseren.

Øvelse 6
1) Vi har et kvadrat med areal 257 m^2. Fra sætning 5 (der siger, at forstørres alle sidelængder i en polygon med en faktor f, så bliver arealet f^2 gang så stort) har vi, at hvis omkredsen fordobles, så bliver arealet 2^2 gang så stort, altså $4 \cdot 257$ m^2 = 1028 m^2.

2) Hvis sportspladsen er blevet forstørret med samme faktor på længde og bredde, kan vi tillade os at anvende sætning 5. Da arealet er blevet firdoblet og da $4 = 2^2$, må der være tale om en lineær forstørrelse med en faktor 2. Omkredsen er således blevet 1800 meter.

Men her er virkelig tale om et skøn, fordi vi ikke ved noget om, hvordan sportspladsen er blevet større. Hvis man nysgerrigt følger dette spor, så skifter opgaven karakter af en øvelse til en undersøgelse. Undersøgelsen vil vise, at hvis sportspladsen af en eller anden mærkelig grund fra starten var meget lang og smal, så ville omkredsens vækst afhænge meget af om den nye sportsplads blev lavet ved at lægge fire af de gamle i forlængelse af hinanden eller ved siden af hinanden langs de lange sider. Teoretisk set kan man herved, på den ene side få at omkredsen kun vokser ganske lidt, og på den anden at den vokser med en faktor tæt på fire ligesom arealet.

3) Hvis sidelængderne i rektanglet vælges til hhv. 99,9 m og 0,1 m bliver arealet = $(99{,}9 \cdot 0{,}1)$ m^2 = 9,99 m^2, altså kan arealet blive mindre end 10 m^2.

Det største areal, som et rektangel med en omkreds på 200 m kan få, er, når rektanglet har form som et kvadrat (se ω-bogens afsnit om andengradspolynomiet) med sidelængden 50 m, hvor arealet = $(50 \cdot 50)$ m^2 = 2500 m^2, altså kan arealet ikke bliver større end 5000 m^2.

4) Dette er et spørgsmål, der har optaget matematikerne siden den græske oldtid, og problemet har navn efter et gammelt sagn: Didos problem, men kaldes også det isoperimetriske problem. Det drejer sig om, hvor meget areal man kan omslutte med en lukket snor med given længde. Det er nemt nok at se, at arealet kan blive meget lille, hvis man trækker snoren ud til en dobbelt linje. Så det udfordrende problem i denne forbindelse er, at få arealet så stort som muligt. Vi har ovenfor nævnt, at hvis formen skal være rektangulær, så har kvadratet den optimale form. Men hvad hvis det skal være en trekant, en femkant, eller hvis der slet ikke er krav til formen. En ledetråd i problemets udvikling har været, at det ser ud til at arealet bliver større jo mere symmetri, der er i figuren.

Vi vil ikke ødelægge den fornøjelse, der er i at prøve kræfter med noget, det har taget menneskeheden omkring 2000 år at få rede på, men vil give et kort svar på spørgsmålet i opgaven:

Svar: Ja, der er den sammenhæng, at en figur med omkreds L har et areal A, der tilfredsstiller uligheden: $0 \le A \le \dfrac{L^2}{4\pi}$. Men arealet kan antage alle værdier derimellem.

Øvelse 10
Græsplænen har form som et rektangel og sidelængderne forholder sig som 6 : 5.

Lagner og håndklæder udgør $8\frac{1}{3}\%$ af arealet af plænen.

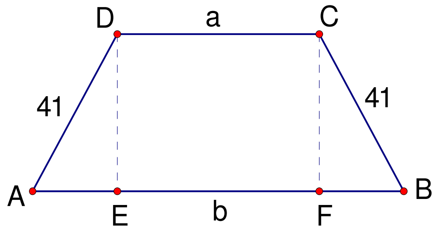
Arealet af håndklæder og lagner tilsammen beregnes til 62,5 m^2

$8\frac{1}{3}\%$ = 62,5 m^2, så udgør 100% 750 m^2. Altså er plænens areal 750 m^2.
Vi kan finde plænens dimensioner ved at finde ud af, hvor mange rektangler med arealet 6 m · 5 m = 30 m^2, der kan være på 750 m^2.

750 m^2 : 30 m^2 = 25. Ser vi det som, at arealet er blevet forstørret 25 gange, kan vi ved brug af sætning 5 finde sidelængdens mål. Sidelængden er blevet forstørret med $\sqrt{25}=5$, rektanglets dimensioner er hhv. 6 m · 5 = 30 m og 5 m · 5 = 25 m.

Alternativt kunne vi have kaldt siderne for $5x$ og $6x$ og fundet x ud fra ligningen $5x \cdot 6x = 750$. Dette ville have givet $x = 5$ og samme svar som ovenfor. ($x = -5$ må kasseres som løsning til det geometriske problem).

Øvelse 13

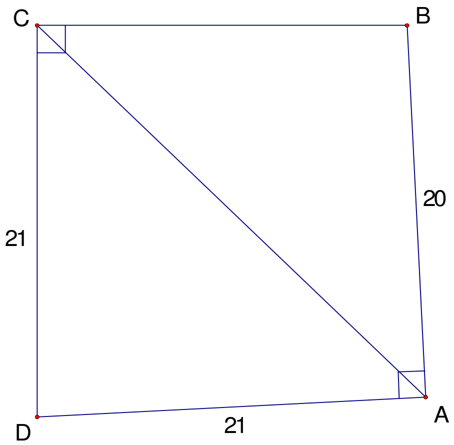


Vi bemærker, at $AD = BC$, altså har vi et ligebenet trapez, længden $AE = FB$ = 18 m : 2 = 9 m.
Højden h findes vha. Pythagoras' sætning: $9^2 + h^2 = 41^2$. h = 40 m.

a og b findes: Vi kender arealet af trapezet og har, at $b = a + 18$, ved anvendelse af arealformlen for et trapez fås $40 \cdot \frac{a+a+18}{2} = 620$, hvoraf fås at a = 6,5 m og b = 24,5 m. Trapezet er altså noget højere i forhold til bredden end på vores figurskitse.

Øvelse 16
Plænens plus gangens areal beregnes til 214,34 m^2. Plænens areal beregnes til 153,94 m^2.
Forøgelsen i procent: $\frac{214,34-153,94}{153,94}\cdot 100\% \approx 0,392$, dvs. plænens areal forøges med ca. 39%.
Tænker man på, at areal vokser med kvadratet på den lineære forstørrelsesfaktor, kan man løse opgaven uden at udregne arealer: $\left(\frac{8,26}{7}\right)^2 = 1,3924$ altså en arealvækst på ca. 39 %.

Øvelse 19
Vi bestemmer først arealet af den her tegnede del af figuren.



Det fremgår, at $\triangle CDA$ er ligebenet, dvs. $\angle DAC = \angle ACD$, og da $\angle A$ og $\angle C$ begge er rette er $\angle CAB = \angle BCA$, heraf fremgår, at $\triangle ABC$ også er ligebenet og længden af *BC* derfor er lig 20 m.

Af den vandrette diagonal i figur 19 i Ypsilon har vi allerede fundet stykket *BC* = 20 m.

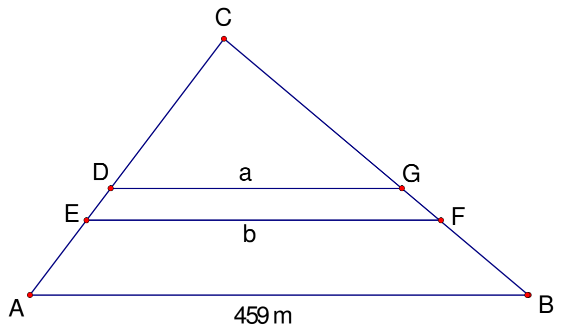
Den resterende del på den anden side af *C* beregnes vha. Pythagoras' sætning, idet vinkel *C* er ret: $21^2 + x^2 = 35^2$ eller x = 28 m. I alt bliver diagonalen 48 m.

Hele arealet findes:
Arealet af firkant *ABCD* findes lettest ved at opdele den i to retvinklede trekanter ved hjælp af diagonalen *BD*, hvilket giver $2\cdot$ ½ $\cdot 20 \cdot 21 = 420$ m^2
Arealet af den retvinklede trekant med siderne 21, 35 og 28 meter er lig 294 m^2
Arealet at trekanten 'på toppen' er ifølge Herons formel lig

$$\sqrt{56(56-45,5)(56-18,5)(56-48)} = 420\,\mathrm{m}^2$$

I alt giver dette præcis 1134 m^2.

Lærereksamen i regning december 1962, opg. 4



Arealet af $\triangle ABC$ er (67128,75 + 2639,25 + 13884,75) : 13884,75 ≈ 6,0248 gange så stort som arealet af $\triangle DGC$. Ifølge sætning 5 er sidelængden på 459 m i $\triangle ABC$ $\sqrt{6{,}0248}$ så stor som *a*, da siderne er parallelle.
Dvs. $a = 459 : \sqrt{6{,}0248} \approx 187{,}0034$. Siden *a* er altså ca. 187 m.

(Regner man med alle decimaler på lommeregneren, får man faktisk præcis 187 meter. Typisk for den tids opgaver var der kælet meget for, at man ofte skulle få pæne præcise tal. Således giver (67128,75 + 2639,25 + 13884,75) : 13884,75 faktisk $\frac{27^2}{11^2}$,således at det efter uddragning af kvadratrod giver 27/11, hvilket forklare det præcise heltallige resultat 187.)

Arealet af $\triangle ABC$ er (67128,75 + 2639,25 + 13884,75) : (2639,25 + 13884,75) = 5,0625 gange så stort som arealet af $\triangle EFC$.

Længden af AB er $\sqrt{5{,}0625}$ gange så stor som *b*, dvs. $b = 459 : \sqrt{5{,}0625} = 204$ præcis. Siden *b* er altså 204 m.

Vejens bredde *h* findes:
Arealformlen for trapez anvendes. Arealet af vejen er lig 2639,25 m^2.

$h \cdot \frac{187+204}{2} = 2639{,}25$ heraf fås *h* = 13,5. Vejbredden er 13,5 m.

Erstatning udgør 4011,66 kr., som gives pr. kvadratmeter plus et tillæg på 18,75%.

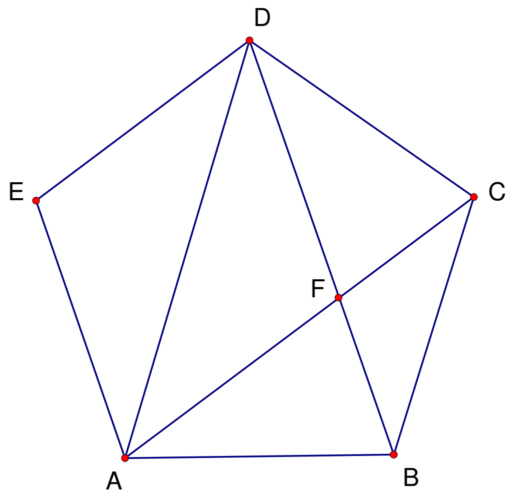
Vi har således, at 118,75% = 4011,66 kr. Dvs. 100% = $\frac{4011{,}66}{118{,}75} \cdot 100$ kr. = 3378,24 kr.

Erstatning pr. kvadratmeter = $\frac{3378{,}24}{2639{,}25}$ kr./m^2 = 1,28 kr./m^2.

Lærereksamen i linjefaget matematik Juni 2001
Denne opgave kræver megen indsigt i euklidisk geometri, som Ypsilon dækker i et senere kapitel. Hvis man har den elementære euklidiske geometri præsent, kan man dog prøve kræfter med opgaven.

1) En regulær sekskant består af seks ligesidede trekanter. Højden i en ligesidet trekant med siden s er $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s$ (kan findes vha. Pythagoras' sætning).

Arealet af en regulær sekskant med siden $s = 6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot s\cdot s = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot s^2$.



2) Når man skal vise, at en trekant er ligebenet, skal man vise, at to af siderne er lige store, eller at vinklerne ved grundlinjen er lige store.

Da femkanten er regulær, er $\triangle ABD$ kongruent med $\triangle CDA$. Heraf følger, at $\angle DAC = \angle BDA$, og da de to vinkler er vinkler ved grundlinjen i $\triangle AFD$, har vi vist, at denne er ligebenet.

3) $AFDE$ er et ligesidet trapez, da femkanten er regulær. Derfor er $\angle ACD = \angle EAC$. Endvidere har vi, da femkanten er regulær og meget symmetrisk, at AE er parallel med BD. Og da ensliggende vinkler ved parallelle linjer er ens, får vi, at $\angle EAC = \angle DFC$. Altså er $\angle DFC = \angle ACD$, hvorved vi har vist, at $\triangle CDF$ har vinklerne ved grundlinjen lige store og dermed er ligebenet.

4) For at vise, at de to trekanter er ligedannede forsøger vi at vise, at de er ensvinklede. Da $ABCD$ er et ligebenet trapez, og $ACDE$ ligeledes er et ligebenet trapez kongruent med $ABCD$, får vi, at $\angle CDA = \angle ACD$, og vi har i 3) vist, at $\angle DFC = \angle ACD$, altså er vinklerne ved grundlinjen i begge trekanter alle fire lige store, og dermed er den tredje vinkel i begge trekanter også lige store, altså er trekanterne CDF og DAC ensvinklede og dermed ligedannede.

Lærereksamen i linjefaget matematik Juni 2001 fortsat

5) $|AF| = |ED| = s$, idet de modstående sider i et parallelogram er lige store. Diagonalen AC har derfor længden $s + |FC|$. Vi vil finde $|FC|$ ved at opstille en ligning og kalder i den forbindelse $|FC|$ for x. Vi benytter, at CDF er ligedannet med DAC til at opstille to lige store forhold:
$\frac{x}{s} = \frac{s}{s+x}$, hvoraf (ved multiplikation med $s(s + x)$ på hver side) fås, at $x^2 + sx - s^2 = 0$.

Denne ligning kan som løses ud fra løsningsformlen for en andengradsligning:
$x = \frac{-s \pm \sqrt{5 \cdot s^2}}{2} = \frac{-s \pm s\sqrt{5}}{2}$, hvor vi kun kan bruge den positive løsning, altså $\frac{-s + s\sqrt{5}}{2}$, og vi har nu et udtryk ved s for diagonalens længde: $\left(\frac{8,26}{7}\right)^2 = 1,3924$

6) Den nemme måde at løse spørgsmål 6 på er ved at slå formlen for arealet af en regulær femkant med siden s op i en formelsamling: Areal = $\frac{s^2}{4}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$.
Men måske har meningen i eksamensopgaven fra Aalborg været, at man skulle udlede denne formel selv, hvilket er muligt med resultatet fra 5), Pythagoras' sætning og arealbestemmelse ved triangulering. Vend evt. tilbage til dette i en repetitionsfase.
Vi har $s = 4$ cm, og arealet bliver $4\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ cm^2.

7) Vi skal bestemme fodboldens overflade. Fra 1) har vi, at arealet af en regulær sekskant med siden $s = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2$. Vi indsætter $s = 4$ cm og får $24 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.

Arealet af overfladen af fodbolden = 12 · $4\sqrt{25+10\sqrt{5}}$ + 20 · $24 \cdot \sqrt{3}$ = $48 \cdot (\sqrt{25+10\sqrt{5}} + 10\sqrt{3})$.
Heraf får vi, at arealet af overfladen er ca. 1161,7 cm^2.

8) Fodboldens radius bestemmes ved at sætte det under 7) fundne areal lig med overfladearealet, som findes ved at betragte fodbolden som kugleformet.
$4 \cdot \pi \cdot r^2 = 48 \cdot (\sqrt{25+10\sqrt{5}} + 10\sqrt{3})$, hvoraf fås, at radius er ca. 9,6 cm.

3. Rumfang

Opgave 3
Ved opdeling af 2-4-6-pyramidestubben kan man bestemme rumfanget.

Først trækker vi lodrette linjer fra det øverste kvadrat og ned til grundfladen, herved fremkommer en kasseformet prisme med højden 6. Arealet af grundfladen = 2 · 2 = 4. Rumfang = 4 · 6 = 24.

Fra hvert hjørne i det øverste kvadrat trækkes parallelle linjer til kanten af det nederste kvadrat. Herved fremkommer der fire prismer, der hver har en trekantet grundflade og en højde på 2 (her 'ligger' højden ned). Arealet af grundfladen = $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 = 3$. Rumfang = 3 · 2 = 6.
De fire prismer har til sammen rumfanget 4 · 6 = 24.

Nu mangler vi fire 'skæve' pyramider i hvert hjørne, de har kvadratiske grundflader og en højde på 6. Areal af grundfladen = 1 · 1 = 1. Rumfang = $\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 1 = 2$.
De fire pyramider har tilsammen rumfanget 4 · 2 = 8.

Pyramidestubbens rumfang er lig 24 + 24 + 8 = 56.

Øvelse 5
Øvelse i tetraeder
I denne øvelse udnyttes de formler, vi lige har læst om.

1) Rumfang og overflade for et tetraeder med siden 10 cm beregnes.
Først bestemmes arealet af overfladen:
Højden i en sideflade (*AM* på figur 12) er lig $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 = 5\sqrt{3}$.
Arealet af én sideflade er lig $\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 10 = 25\sqrt{3}$.
Arealet af overfladen er lig $4 \cdot 25\sqrt{3} = 100\sqrt{3} \approx 173$.
Med benævnelse er overfladens areal ca. lig 173 cm^2. Hvis læseren undervejs har regnet med afrundede decimaltal, kan der forekomme afvigelser, hvilket kan give anledning til overvejelser over størrelsen af disse.

Herefter bestemmes rumfanget:
Rumfanget er lig $\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 10^3 \approx 118$.
Med benævnelse er rumfanget ca. lig 118 cm^3.

2) Rumfang og overflade for et tetraeder med tetraederhøjden (*TO* på figur 12) på 10 cm beregnes.

Først bestemmes arealet af overfladen:

Øvelse 5 fortsat

Vi har: $TO = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot s$ og $TO = 10$, s findes: $s = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot 10 = 5\sqrt{6}$

Højden i en sideflade (AM på figur 12) bestemmes:

$$AM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 5\sqrt{6} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

Arealet af én sideflade er lig $\frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{2}}{2} \cdot 5\sqrt{6} = \frac{75\sqrt{3}}{2}$.

Arealet af overfladen er lig $4 \cdot \frac{75\sqrt{3}}{2} = 150\sqrt{3} \approx 260$.

Med benævnelse er overfladens areal ca. lig 260 cm^2.

Herefter bestemmes rumfanget:

Rumfanget er lig $\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(5\sqrt{6}\right)^3 = 125\sqrt{3} \approx 217$.

Med benævnelse er rumfanget ca. lig 217 cm^3.

3) Rumfang og areal af overflade af et tetraeder med sidelinjen (AM på figur 12) 10 cm.

Overfladens areal er ca. lig 231 cm^2. Rumfanget er ca. lig 181 cm^3.

4) Rumfanget på 1 liter = 1 dm^3.

Terning:
Sidelængden i en terning med rumfang 1 dm^3 er lig 1 dm. Overfladearealet er lig 6 · 1 dm^2 = 6 dm^3.

Tetraeder:
Vi finder sidelængden ud fra rumfangsformlen:

$$\frac{\sqrt{2}}{12} \cdot s^3 = 1, \quad s = \sqrt[3]{\frac{12}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$$

Højden i én sideflade = $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{2}} = \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$

Areal af én sideflade = $\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{2}}$

Areal af overfladen = $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{6\sqrt{2}} = \sqrt{3} \cdot \left(\sqrt[3]{6\sqrt{2}}\right)^2 \approx 7,2$ Altså ca. 7,2 dm^3.

Heraf fremgår det, at terningen har den mindste overflade.

Øvelse 11
Ifølge Archimedes lov har vi, at rumfanget af ringen er lig 25,76 g – 24,12 g = 1,64 g = 1,64 cm^3.

Ringens massefylde i gram/cm^3: $\frac{25,76}{1,64} \approx 15,71$

Guld har massefylde 19,3. Vi kan så konstatere, at hvis ringen var fremstillet af rent guld, skulle den veje 19,3 g/cm^3 · 1,64 cm^3 = 31,652 g, og det gør den ikke, altså er der tilsat et stof med en lettere massefylde, vi går ud fra det er sølv. Men hvor meget sølv er der tilsat?

Sølv har massefylden 10,5.

Vi finder, hvor stor en del af ringen, målt i cm^3, der er sølv.
Vi lader x = cm^3 guld og y = cm^3 sølv.

$19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 15{,}71 \cdot 1{,}64$
$x + y = 1{,}64$

Ligningssystemet løses, og vi finder, at $x \approx 0{,}97$ cm^3 og $y \approx 0{,}67$ cm^3.

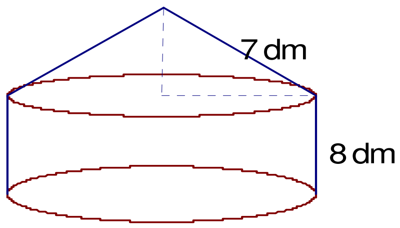
Vi kan også bestemme andelen af guld og sølv i gram:
Vi lader x = gram guld og y = gram sølv.

$19{,}3\,x + 10{,}5\,y = 15{,}71 \cdot 25{,}76$
$x + y = 25{,}76$

Ligningssystemet løses, og vi finder, at $x \approx 15{,}25$ g og $y \approx 10{,}51$ g.

Sammenlign de fundne værdier for x og y i de to ligningssystemer, og beskriv i dagligsprog, hvor stor en del af ringen der er sølv.

Opgave 8
Lærereksamen 1940



Idet vi får oplyst, at keglens sidelinje danner en vinkel på 60° med aksen, og vi ved, at aksen står vinkelret på radius i keglens topflade, får vi, at trekanten med de stiplede kateter er en 30° - 60° - 90° trekant. Om denne har vi, at den korte katete er lig $\frac{1}{2}\cdot$ hypotenusens længde (hvilket også kunne bestemmes ved at tage cosinus til 60° gange længden af hypotenusen). Den lange katete er $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot$ hypotenusens længde (hvilket kan beregnes vha. Pythagoras' sætning).

Heraf fås, at radius i hhv. kegle og cylinder er $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7$ dm, og højden i keglen er $\frac{1}{2}\cdot 7$ dm.

Keglens rumfang i dm^3 = $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 7\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7\right)^2\frac{22}{7} = 134\frac{3}{4}$.

Cylinderens rumfang i dm^3= $8\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 7\right)^2\frac{22}{7} = 924$.

Når cylinderen er fyldt med olie, er der (057,672 – 924) liter = 133,672 liter tilbage, der skal fyldes i keglen. Vi finder, hvor stort det rumfang af keglen, der forbliver tomt, er:
(134,75 – 133,672) liter = 1,078 liter.

Dette tomme rumfang udgør en lille kegle øverst oppe i figuren.

Vi kender højde og rumfang i den store kegle. Begge disse størrelser skal formindskes med den samme faktor, som vi kalder *x*.

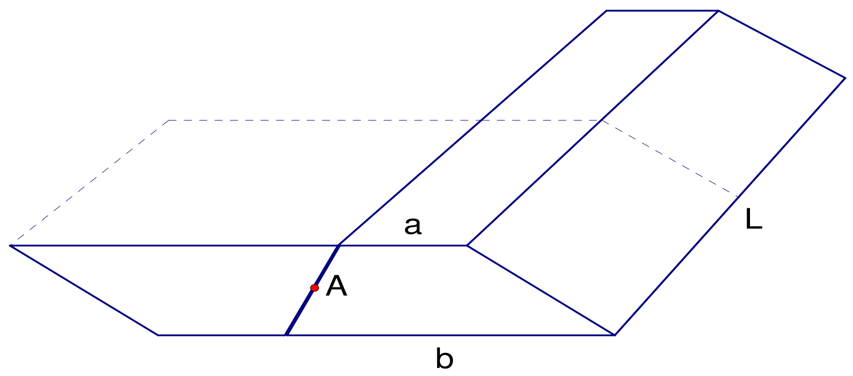
Rumfang af lille kegle = $\frac{1}{3}\cdot 3{,}5\cdot x\cdot\left(\frac{7\sqrt{3}}{2}\cdot x\right)\cdot\frac{22}{7} = 1{,}078$, og vi finder $x = 0{,}2$.

Den lille kegle har højden 0,2 · 3,5 dm = 0,7 dm. Dvs. olien når en højde på (3,5 – 0,7) dm = 2,8 dm i keglen, og i hele beholderen når den en højde på (8 + 2,8) dm = 10,8 dm.

Opgave 10
Lærereksamen (grunduddannelsen) maj-juni 1977

Her bringes blot et resultat: 1) 2730 g 2) 3,15 dm^3.

Opgave 11
Vi skal vise at en dæmning med tværsnit som et skævt trapez med bundbredde b, topbredde a, højde h og længden L har rumfang $\frac{1}{2} \cdot L \cdot h(a+b)$.



Dæmningen 'deles midt over', og vi flytter halvdelen som vist på tegningen. Derved fremkommer et prisme med længden ½ · L. Vi ser, at formen på prismets endeflade fremkommer på samme måde, som hvis vi havde drejet trapezet om punktet A, hvorved der fremkommer et parallelogram med højden h, og to parallelle sider, der hver har længden $a + b$ (jf. kapitel 2 om arealberegning). Arealet af parallelogrammet er lig $h(a + b)$.

Vi kan nu beregne rumfanget, idet rumfanget af et prisme er højde gange grundflade.

Rumfanget af dæmningen = ½ · L · $h(a + b)$, hvilket skulle vises.

Opgave 12

1) Vi skal vise, at arealet af et snit i afstanden x fra midtpunktet af legemerne er lig $\pi(R^2 - x^2)$.

Kuglen: radius r i snitfladen findes vha. Pythagoras' sætning:

$x^2 + r^2 = R^2$ altså har vi $r^2 = R^2 - x^2$

Arealet af snitfladen = $\pi \cdot r^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Cylinderskiven: Afstanden fra midtpunktet til top- eller bundfladen i cylinderen er lig længden af radius R. På samme måde forholder det sig med et snit i afstanden x fra midtpunktet, derfor er radius i kegledelen af snittet lig x.

Arealet af snitfladen = $\pi \cdot R^2 - \pi \cdot x^2 = \pi(R^2 - x^2)$.

Hermed er det vist, at de to snitflader har samme areal.

2) Vha. den simple udgave af Cavalieris princip skal vi finde kuglens rumfang udtrykt ved R.

Fra 1) har vi, at for $0 \le x \le R$ vil snitfladerne i de to figurer have samme areal, og de to figurer har samme højde, nemlig $2 \cdot R$. Kuglens rumfang er ifølge Cavalieris princip lig den udhulede cylinders rumfang.

Rumfanget af den udhulede cylinder er lig rumfanget af cylinderen minus rumfanget af de to kegler.
Kuglens rumfang = $2 \cdot R \cdot \pi \cdot R^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot R \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$.

4. Tallenes historiske udvikling

Øvelse 1

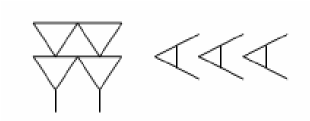
Da '19' er det største ciffer, består det største trecifrede tal af tre '19' under hinden skrevet i maya symboler, og resultatet bliver:

$19 \cdot 20^2 + 19 \cdot 20 + 19 = 7999$

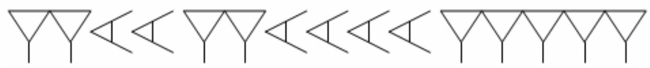
Man kunne også sige, at det største trecifrede må være 1 mindre end det mindste fircifrede, som er $1 \cdot 20^4 = 8000$

Øvelse 3

Idet vi benytter friheden i fortolkningen af positionerne til at læse de første fire tegn som tallet 4, hvorefter de næste tre står 'efter kommaet' og dermed angiver $\frac{30}{60}$, skrives $4\frac{1}{2}$ som:

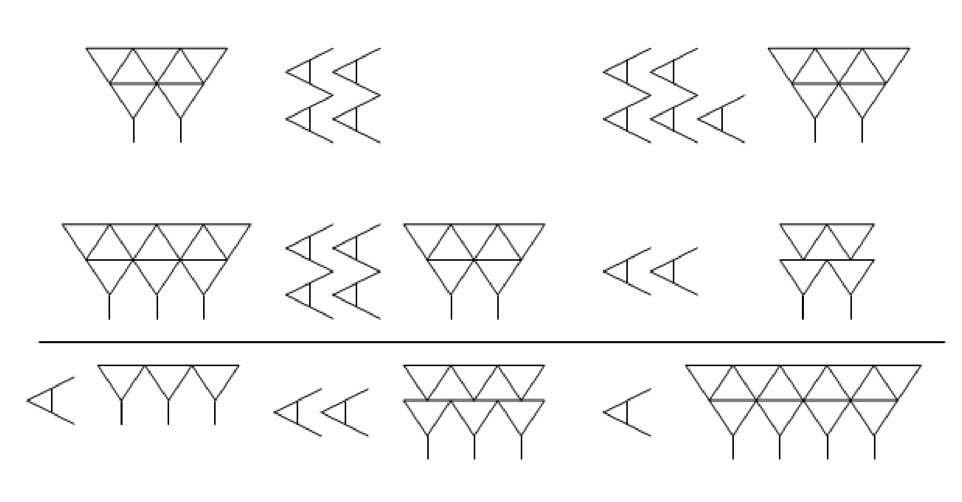


142 skrives med de første seks tegn, og $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ skrives med de sidste ni tegn, dvs. $142\frac{3}{4}$ skrives som:



Man kan ikke se på dette tal, at det er ca. 140. Det kunne godt tolkes som et tal, der var 60 gange større og for den sags skyld 60 gange mindre osv.

5 timer 40 minutter og 55 sekunder kan skrives som den øverste række, 7 timer 45 minutter og 24 sekunder som rækken under. Herefter er additionen ikke vanskelig, resultatet bliver som rækken under stregen: 13 timer 26 minutter og 19 sekunder.



Opgave 3
Vi vil vise, at den moderne notation svarer til den geometriske fortolkning:

$x^2 + 1 \cdot x = \frac{3}{4}$ svarer direkte til den geometriske fortolkning i figur 8 ud fra den forklaring, der er givet lige før figur 8.

Den geometriske idé med at lægge et kvadrat på $\frac{1}{2}$ gange $\frac{1}{2}$ ind, således at figur 9 komplementeres til kvadratet i figur 10, udtrykkes ved at følgende ligninger er ensbetydende:

$x^2 + 1 \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ er ensbetydende med $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Den geometriske konstatering af, at et kvadrat med arealet 1 må have side 1, udtrykkes ved, at ovenstående resultat er ensbetydende med:

$x + \frac{1}{2} = 1$, som er ensbetydende med $x = \frac{1}{2}$, idet ligningen let løses ved subtraktion af $\frac{1}{2}$ på hver side af lighedstegnet.

Øvelse 5

1) 8 · 17
   4 · 34
   2 · 68
   1 · 136

Svar: 8 · 17 = 136

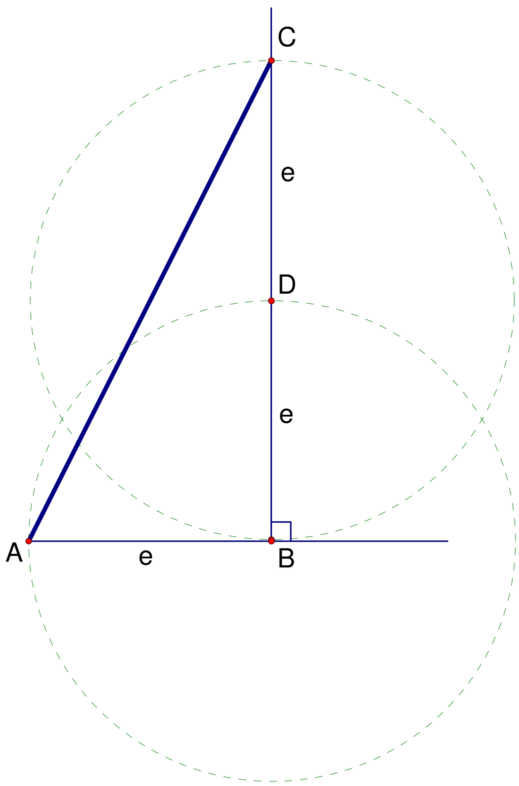
2) \37 · 51
   18 · 102
   \9 · 204
   4 · 408
   2 · 816
   1 · 1632

Svar: 37 · 51 = 51 + 204 + 1632 = 1887

Øvelse 9

1) Konstruktion af $\sqrt{5}$:

Vi konstruerer en retvinklet trekant, hvor længden af kateterne er hhv. 1 og 2, idet vi herved – ifølge Pythagoras' sætning – får hypotenusen lig $\sqrt{5}$.



Vi afsætter et linjestykke *AB* med længden *e*.

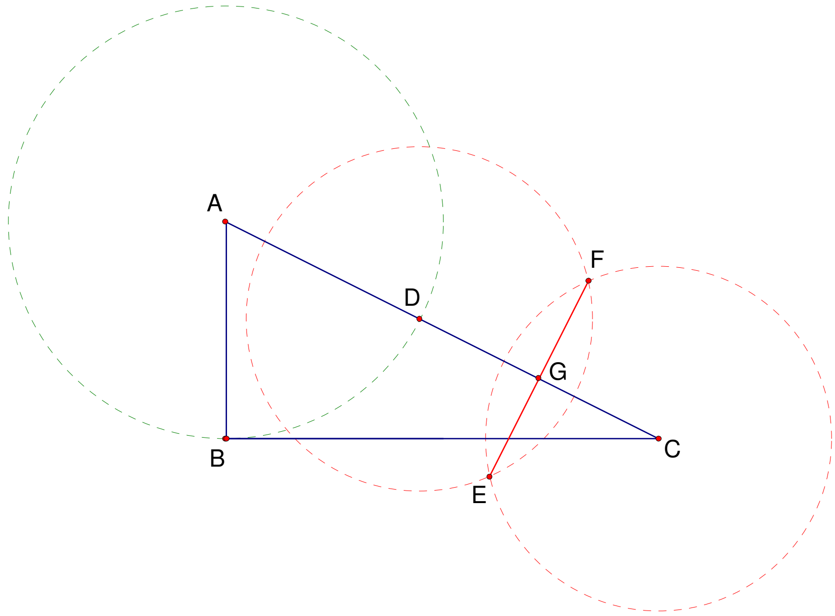
Dernæst oprejser vi den vinkelrette (se evt. figur 22) til *AB* gennem *B* og tegner en cirkel med afstanden *BA* som radius og centrum i *B*. Skæringspunktet mellem denne cirkel og den oprejste vinkelrette kaldes for *D*.

Vi tegner igen en cirkel med afstanden *BA* som radius og nu med centrum i *D*. Skæringspunktet mellem denne cirkel og den oprejste vinkelrette kaldes for *C*.

Da *AB* har længden 1, og *BC* har længden 2, har vi nu en hypotenuse *AC* i den konstruerede retvinklede trekant med længden $\sqrt{5}$.

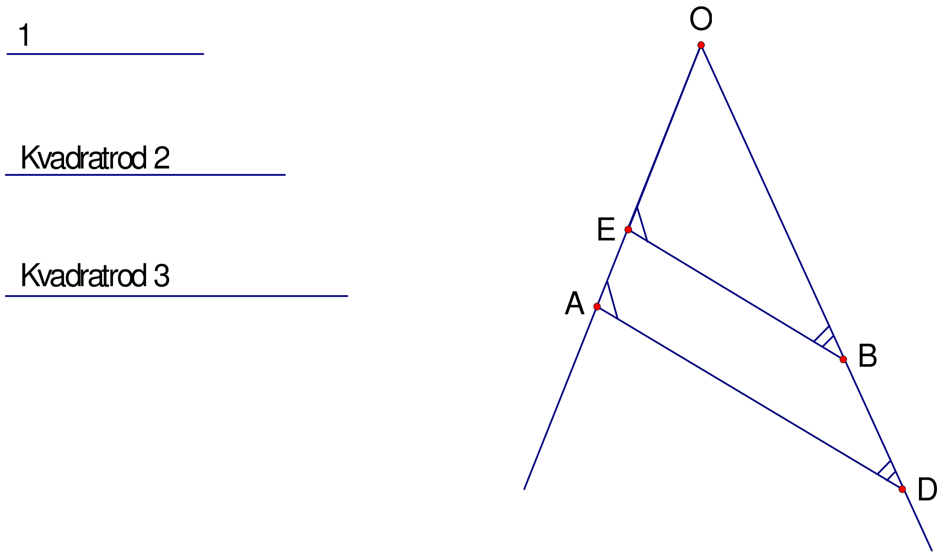
Øvelse 9 fortsat

2) Det gyldne snit $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ konstrueres.



Vi genbruger den retvinklede trekant fra 1), hvor hypotenusen har længden $\sqrt{5}$, og *AB* er lig 1. Vi subtraherer 1 ved at tegne en cirkel med centrum i *A* og radius *AB*, skæringspunktet med *AC* kaldes *D*. Nu mangler vi at dividere med 2, altså halvere *CD*. Dette gøres ved at konstruere midtnormalen til *DC*. Med centrum i hhv. *C* og *D* tegnes to cirkler med samme radius, gennem skæringspunkterne *E* og *F* tegnes linjen, som er midtnormal til *CD*. Skæringspunktet mellem linjen gennem *C* og *D* samt midtnormalen benævnes *G*. $DG = CG$ har længden $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

Øvelse 11



En vilkårlig vinkel tegnes, toppunkt benævnes *O*. Ud af vinklens højre ben afsættes linjestykket med længden 1 svarende til længden *OE*. Derefter afsættes $\sqrt{2}$ svarende til *OA*. Ud af vinklens venstre ben afsættes længden $\sqrt{3}$. Ved at forbinde *E* og *B* får vi trekanten *OEB*. Dernæst konstrueres en linje gennem *A* parallel med *EB,* og vi får trekanten *OAD*, hvor *D* er skæringspunktet mellem den parallelle linje og *O*'s venstre vinkelben.

Da *EB* og *AD* er parallelle, er vinklerne ved *A* og *E* lige store, ligesom vinklerne ved *D* og *B* er det, jf. aksiomet om ensliggende vinkler ved parallelle linjer. Den tredje vinkel i hver af de to trekanter er den ved *O*, så derfor er trekanterne ensvinklede. Nu bruger vi sætningen om, at ensvinklede trekanter er ligedannede, og får følgende ligheder:

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OD}{OB} \text{ eller } \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{OD}{\sqrt{3}} \text{ eller } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = OD .$$

Øvelse 14

$$(8+\sqrt{-36})+(8-\sqrt{-36})$$
$$=8+\sqrt{-36}+8-\sqrt{-36}$$
$$=8+8$$

Øvelse 14 fortsat

$$(8+\sqrt{-36})\cdot(8-\sqrt{-36})$$
$$8\cdot 8-8\sqrt{-36}+8\sqrt{-36}-\sqrt{-36}\cdot\sqrt{-36}$$
$$=64-\sqrt{-36}\cdot\sqrt{-36}$$
$$=64-(-36)$$
$$=64+36=100$$

Opgave 14
Når man søger efter sådanne løsninger, er der gammel tradition for at kalde de søgte størrelser for bogstaver fra sidst alfabetet (det engelske), altså x, y og z. I vores tilfælde med to ubekendte vil vi kalde dem for *x* og *y* i stedet for *a* og *b*.

Lad de to tal *t*1 og *t*2 være givne. Så søger vi altså løsninger til ligningerne:

(1) $x+y=t1$

(2) $x\cdot y=t2$

Vi løser ved den såkaldte indsættelsesmetode, idet vi af (1) finder

$y=t1-x$, hvilket indsættes i (2), der derefter bliver til

$x\cdot(t1-x)=t2$

Der ganges ind i parentesen, og får vi en andengradsligning:
$-x^2+t1\cdot x=t2$, der omskrives til et mere normalt format $x^2-t1\cdot x+t2=0$

Vores (og Cardano's) problem drejer sig altså om at løse en andengradsligning. Vi lærer i skolen, at andengradsligningen $ax^2+b\cdot x+c=0$ har to løsninger $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, men vel at mærke kun hvis b^2-4ac er positiv, for eller kan vi ikke uddrage kvadratroden. Men det kan vi godt, hvis vi er lige så dristige som Cardano og uden tøven regner videre med dem, som om intet er hændt. Derfor kan problemstillingen, der er opstillet i ligning (1) og (2) altid løses, men der er sommetider kun en enkelt løsning til ligningerne – og vi får så *x* = *y*.

5. Regneundervisningens nyere historie

Undersøgelse 1

1) Vi finder $\sqrt{1.406} \approx 37{,}5$ dernæst forsøger vi os med nogle tal, der ligger tæt på dette resultat: $37 \cdot 38 = 1406$, dvs. de to på hinanden følgende naturlige tal er 37 og 38.

2) Kvadratroden af 1.407 er meget lidt større end kvadratroden af 1.406, hvilket vil sige, at de to på hinanden følgende tal skal være større end $37 \cdot 38$, men allerede $38 \cdot 39 = 1.482$ og giver et for stort resultat. Altså findes der ikke to på hinanden følgende naturlige tal, der ganget giver 1.407.

Undersøgelsen af 34.981.407 klares vha. samme metode, idet du konstaterer, at $5913 \cdot 5914$ giver for lidt og $5915 \cdot 5916$ giver for meget, så der kun bliver chance for $5914 \cdot 5915$

3) Ti på hinanden følgende naturlige tal giver mere end $2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 10$, hvi1ket er 900. Derfor kan vi ikke få 785.

4) Ti på hinanden følgende naturlige tal vil som endetal have 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, dvs. vi skal gange med et eller andet tal gange 10, hvilket giver et tal, der ender på 0. Der gør det givne tal ikke, så derfor kan det ikke skrives som produktet af 10 på hinanden følgende naturlige tal.

Hvis du har fået hjælp til denne løsning så overvej lige om 2.359.439.538.402.210 kan skrives på den ønskede måde.

Opgave 5
1) Overlades til læseren.

2)
$45 \cdot 67 = 3.015$ (4 cifre)
Som overslag kan man sige: $50 \cdot 50 = 5 \cdot 5 \cdot 100 = 2.500$, dvs. ved brug af lommeregner skal man forvente omkring fire cifre.

På den anden side kan to tocifrede tal godt resultere i et trecifret tal som ved $10 \cdot 10 = 100$ og i den anden ende giver $99 \cdot 99 = 9801$, så antallet af cifre synes ikke at kunne overstige 4.

$13 \cdot 876 = 11.388$ (5 cifre)
Overslag: $10 \cdot 1.000 = 1 \cdot 1 \cdot 10.000 = 10.000$, dvs. man forventer cirka fem cifre. Går vi til den anden ekstrem finder vi $99 \cdot 9999 = 989901$, altså 6 cifre.

$341 \cdot 2.287 = 779.867$ (6 cifre)
Overslag: $400 \cdot 2.000 = 4 \cdot 2 \cdot 100.000 = 800.000$, dvs. forvente cirka seks cifre.
Men kan det give 7 cifre. Vi prøver med $999 \cdot 9999 = 9.989.001$, så 7 cifre er muligt.

$4.472 \cdot 1.946 = 8.702.512$ (7 cifre)
Fortsæt selv undersøgelsen. Her har vi to 4-cifrede tal som ganget samme giver et 7-cifret tal og ikke $4 + 4 = 8$ cifre. Men giver det altid enten 7 eller 8, når man har sådan to 4-cifrede tal?

$100 \cdot 869 = 86.900$ (5 cifre)
Overslag: $100 \cdot 900 = 1 \cdot 9 \cdot 10.000 = 90.000$, dvs. forvente cirka fem cifre.

$12 \cdot 8 = 96$ (2 cifre)
Overslag: $10 \cdot 10 = 1 \cdot 1 \cdot 100 = 100$, her ville man så forvente cirka tre cifre, men forhåbentlig godtage et resultat på 96. Ekstremerne er $10 \cdot 1 = 10$ og $99 \cdot 9 = 891$.

Hvad mon vi kan sige når et n-cifret tal ganges med et m-cifret tal? Vi kan åbenbart ikke være sikre på, at produktet har $n + m$ cifre. Kan det have $n + m + 1$, $n + m - 1$? Kan vi overbevise os selv om, at den enten giver $n + m$ eller $n + m + 1$. Hvis vi går tilbage til eksemplerne, er der så tilfælde, hvor vi sikkert kan afgøre, om vi rammer $n + m$, og tilfælde hvor det klart er $n + m + 1$.

6. De positive rationale tal

Øvelse 2

'Vise' kan i denne sammenhæng bestå af et sprogligt svar: Hvis vi har *a* *b*'endedele af noget og *c* *b*'endedele af det samme, så betyder det, at vi har *a*+*c* *b*'endedele i alt.

Øvelse 4

1) Omregnet til 24'endedele ses $\frac{10}{12}$ at være størst, nemlig $\frac{20}{24}$.

2) Den fælles nævner er 35 og $\frac{4}{5}=\frac{28}{35}$ er større end $\frac{5}{7}=\frac{25}{35}$. Subtraktionen giver: $\frac{28}{35}-\frac{25}{35}=\frac{3}{35}$

3) $\frac{a}{9}<\frac{12}{54}$ eller hvis vi forkorter $\frac{a}{9}<\frac{2}{9}$, da de to brøker har en fælles nævner, har vi et sandt udsagn for $a < 2$. Faktisk er udsagnet sandt hvis og kun hvis $a < 2$.

4) Man finder den største af en række brøker ved at finde en fælles nævner for brøkerne og derefter sammenligne tællerne.

5) Vi skal vise, at $\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{ad}{bd}<\frac{bc}{bd} \Leftrightarrow ad<bc$.

$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ ifølge sætning 1 kan vi gange med samme tal i tæller og nævner, uden at en brøk ændrer værdi

$\Leftrightarrow \frac{ad}{bd}<\frac{bc}{bd}$ vi ganger med samme tal på begge sider af lighedstegnet

$\Leftrightarrow \frac{bd\cdot ad}{bd}<\frac{bd\cdot bc}{bd}$ vi forkorter

$\Leftrightarrow ad<bc$, hvilket skulle vises.

Øvelse 4

6) Vi har, at $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, og skal vise, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$

Vi ser først på $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$ der ifølge øvelse 4.5 er ensbetydende med ($\Leftrightarrow$)

$a(b+d) \le b(a+c)$ vi ganger ind i en parentes

$\Leftrightarrow ab + ad \le ba + bc$ vi subtraherer $ab = ba$ på begge sider af lighedstegnet

$\Leftrightarrow ad \le bc$ ifølge 5)

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$.

Det sidste var givet at være sandt, så derfor er også det ensbetydende udsagn $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$ sandt

Tilsvarende for $\frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$, hvorefter vi har vist, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$ er et sandt udsagn og kan konkludere, at hvis man adderer brøker af forskellig størrelse ved at addere tæller med tæller og nævner med nævner, så får man et resultat, der ligger mellem de to brøker, der skulle adderes.
Vi interesserer os i dette kapitel kun for positive brøker. Læseren kan ved en senere lejlighed overveje, om det vi her har vist også gælder, hvis vi tillader negative brøker, som man jo gør i skolen og i samfundet.

7) Vi finder tre brøker, der ligger mellem $\frac{1}{7}$ og $\frac{1}{8}$:

Vi finder en tilstrækkelig stor fællesnævner, således at der ligger tre brøker med den samme fællesnævner mellem de to givne brøker:

$\frac{1 \cdot 32}{7 \cdot 32} = \frac{32}{224}$ og $\frac{1 \cdot 28}{8 \cdot 28} = \frac{28}{224}$, og de tre brøker bliver: $\frac{29}{224}$, $\frac{30}{224}$ og $\frac{31}{224}$.

Men vi kunne også have udnyttet vores fund i 6) ovenfor, for den metode fortæller os, at $\frac{1}{8} < \frac{1+1}{8+7} < \frac{1}{7}$, således at vi har fundet en brøk $\frac{2}{15}$ med den ønskede egenskab. Derefter kan vi bruge samme metode igen til at finde en brøk mellem $\frac{1}{8}$ og $\frac{2}{15}$ osv.

Øvelse 6

Vi skal vise, at $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$.

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ idet vi forlænger brøkerne med hhv. *b* og *d*

$=\frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{b\cdot c}{b\cdot d}$ ensbenævnte brøker adderes blot ved at addere tælleren, fordi de svarer til at man lægger ting af samme type sammen

$=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$, hvilket skulle vises.

På tilsvarende måde kan man vise $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$.

Øvelse 8

Vi beviser på kortest mulige måde, at $\frac{1}{n}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{n\cdot d}$

Venstresiden betyder ifølge vores fortolkning af 'gange', at vi skal tage $\frac{1}{n}$ af $\frac{c}{d}$, hvilket betyder, at vi skal dele stykket $\frac{c}{d}$ i *n* lige store stykker. Tænker vi på det som *c* stykker af størrelsen en *d*'endedel, så kan vi vælge at opdele hver af disse *d*'endedele i *n* stykker og så tage en fra hver. Hvis *d*'endedele hver opdele i *n* lige store stykker stykker, så går der klart *n* af disse på en enkelt *d*'endedel og dermed $n\cdot d$ på en hel, hvorfor disse små stykker pr. definition af vores brøkbegreb er af størrelsen $\frac{1}{n\cdot d}$. Tager vi nu en fra hver af de *c* *d*'endedele, giver dette pr. definition af vores brøkbegreb $\frac{c}{n\cdot d}$, hvilket skulle bevises.

Øvelse 13

Forbrug af korn pr. måned: $1\frac{3}{4}:3=\frac{7}{4}:3=\frac{7}{12}$, altså $\frac{7}{12}$ tons.

$\frac{7}{4}$ tons = $\frac{7}{4}\cdot 10^6$ gram. Antallet af høns, der kan leve af kornet i tre måneder, lad os sige 91 dage:

$\frac{7}{4}\cdot 10^6 : 50 : 91 \approx 385$ høns.

Opgave 5

Det viser sig at de tre tolkninger af $\dfrac{\frac{22}{7}}{\frac{12}{5}}$ giver meget forskellige resultater, så det er vigtigt at referere til den vedtagne og internationalt anvendt definition:

$$22 : \frac{7}{12} : 5 = 22 \cdot \frac{12}{7} : 5 = \frac{22 \cdot 12}{7} : 5 = \frac{22 \cdot 12}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{22 \cdot 12 \cdot 1}{7 \cdot 5} = \frac{264}{35} = 7\frac{19}{35}$$

$$\frac{22}{7} : 12 : 5 = \frac{22}{7} \cdot \frac{1}{12} : 5 = \frac{22 \cdot 1}{7 \cdot 12} : 5 = \frac{22 \cdot 1}{7 \cdot 12} \cdot \frac{1}{5} = \frac{22 \cdot 1 \cdot 1}{7 \cdot 12 \cdot 5} = \frac{22}{420} = \frac{11}{210}$$

$$\frac{22}{7} : \frac{12}{5} = \frac{22}{7} \cdot \frac{5}{12} = \frac{110}{84} = 1\frac{13}{42}$$

Øvelse 15

Gruppe 1 1500 promille; 1,5; $1\frac{1}{2}$; 1,500; $\frac{6}{4}$; $\frac{84}{56}$; $\frac{12}{8}$; $1\frac{3}{6}$; $6:4$

Gruppe 2 0,75; 750.000 ppm; tre fjerdedele; 750 promille; $\frac{3}{4}$; $\frac{351}{468}$; $\frac{21}{28}$; 75 %; $3:4$

Øvelse 16

1) og 2) er de to delbeviser for sætning 2. Da disse beviser er lidt abstrakte for første semester på læreruddannelsen, er det tanken at prøve ideerne i beviserne af på konkrete eksempler, der som regel viser sig lettere.

a) Påvis og argumenter for, at $\frac{80}{117}$ ikke kan skrives som et endeligt decimaltal. Det følger af sætning 2, da 117 = $3^3 \cdot 13$ ikke udelukkende indeholder primfaktorerne 2 og 5. Men vi vil her gå gennem beviset for sætning 2.1 igen:

Antag, at $\frac{80}{117}$ kan skrives som et endeligt decimaltal som fx 0,6837607, som er det svar, man får på en skolelommeregner. Antag altså, at $\frac{80}{117}$ = 0,6837607 gælder eksakt. Så skal vi for at komme videre i bevisideen i sætning 2. 1) gange på hver side af lighedstegnet med en passende tierpotens, som i dette tilfælde skal være 10.000.000, hvilket giver $\frac{80 \cdot 10.000.000}{117}$ = 6.837.607 eller ved gangning med 117 på hver side $80 \cdot 10.000.000 = 6.837.607 \cdot 117$.

Men dette kan ikke være muligt, for på højre side har vi 117 som indeholder fx primfaktoren 13. Ser vi nemlig på venstre side, så består 80 af primfaktorerne 2 og 5, og det samme gør enhver tierpotens og derfor specielt 10.000.000. Vi har altså udelukkende 2 og 5 i primfaktoropløsningen på venstre side, mens der står 13 og 3 og sikkert andre grimme ting gemt i det store tal 6.837.607 på højre side. De to sider kan derfor ikke være lig med hinanden. Den sætning, vi bygger på her, er sætningen om primfaktoropløsningens entydighed, der omtales senere i bogen, og som efter planen vil blive bevist i ε-bogen i dette lærebogssystem.

b) Påvis og argumenter for, at $\frac{117}{80}$ kan skrives som et endeligt decimaltal, som den skulle ifølge sætning 2, idet tælleren kun indeholder primfaktorerne 2 og 5. Igen vil vi ikke nøjes med at benytte resultatet fra sætning 2. Vi vil gå bagom og gennemføre beviset i sætning 2. 2) i dette eksempel.

Ideen er at opløse 80 i de relevante faktorer:

$$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4 \cdot 5}$$

Så forlænger vi brøken til højre, så vi får en tierpotens i nævneren. Det sker klart nemmest ved at forlænge med 5^3, hvorefter den vi kan fortsætte:

$$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4 \cdot 5} = \frac{117 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 5^3} = \frac{117 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{117 \cdot 5^3}{10^4} = \frac{14.625}{10.000} = 1,4625$$

Opgave 9

1) $x = 0,\overline{123}$

$1000 \cdot x = 1000 \cdot 0,\overline{123}$

$1000x = 123,\overline{123}$

$1000x - x = 123,\overline{123} - 0,\overline{123}$

$999x = 123$

$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

2) $q = 0,5\overline{536}$

$10 \cdot q = 10 \cdot 0,5\overline{536}$

$10q = 5,\overline{536}$

$1000 \cdot 10q = 1000 \cdot 5,\overline{536}$

$10.000q = 5.536,\overline{536}$

$10.000q - 10q = 5.536,\overline{536} - 5,\overline{536}$

$9.990q = 5.531$

$q = \frac{5.531}{9.990}$

I både 1) og 2) har vi kun anvendt lovlige metoder ved ligningsløsning – prøv selv at redegøre for hvilke – og vi kunne have tilladt at skrive ensbetydende hele vejen, altså har vi vist, at de to uendelige periodiske decimaltal kan skrives som brøker. Vi har dog tilladt os at flytte på kommaet i en uendelige decimalbrøk efter de samme regler som i endelige decimalbrøker ('man ganger med 10 ved at flytte kommaet en plads til højre'), og det er ikke noget, vi har bevist rigtigheden af her i bogen. Det er faktisk svært at gøre helt præcist, fordi en uendelig decimalbrøk består af uendelige mange led, der skal lægges sammen, hvilket har en tendens til at få det til at svimle for folk, der forsøger. Bare tanken om, at uendeligt mange ting lagt sammen kun giver noget endeligt, syntes for de fleste stridende mod sund fornuft og i al fald mod daglig praksis, jf. vores behandling af de reelle tal i det historiske kapitel og senere i ω-bogen.

7. Brøkregning i to fagdidaktiske skoler

Øvelse 1

Et tilfredsstillende svar på opgaven: "del 8 brød til 10 mænd", der indeholder stambrøken $\frac{1}{4}$, kunne være: $\frac{1}{2}$ brød til hver, og der er 3 brød tilbage, $\frac{1}{4}$ brød til hver, og der er et halvt brød tilbage, som fordeles med $\frac{1}{20}$ til hver. Dvs. de får hver $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$.

8. Negative tal

Opgave 4

Vi skal vise, at den kommutative lov gælder for multiplikation af hele tal: $a \cdot b = b \cdot a$
Det er som hævdet her i bogen mere besværligt end egentligt svært, fordi vi bliver nødt til at dele op i de tilfælde, der kan forekomme, fordi definition 2 af multiplikation for de hele tal er opdelt i tilfælde:

> Definition af + og · for de hele tal:
>
> For ethvert par ^-n ,^-m af negative tal defineres (2. 9)) $^-n \cdot {}^-m = n \cdot m$.
>
> For blandet positive og negative tal n, ^-m defineres: (definition 2. 11)) $n \cdot {}^-m$ (og $^-m \cdot n$) = $^-(n \cdot m)$.
>
> Endelig defineres i definition 3, at resultatet giver 0 , når mange ganger et helt tal med 0.

Ud fra disse definitioner er det indlysende, at den kommutative lov gælder, hvis et af tallene er 0, for i så fald bliver resultatet efter definition 3 lig med 0 på begge sider af lighedstegnet.

Hvis begge tal er positive, så er der tale om naturlige tal, hvor den kommutative lov gælder ifølge vores formel 3).

Hvis begge tal er negative følger den kommutative lov let af (definition 2. 9)), idet $-n \cdot -m = n \cdot m$ pr. definition.

Så observerer vi, at n og m er naturlige tal, og vi derfor ifølge formel 3) har $n \cdot m = m \cdot n$, der igen ifølge (definition 2. 9)) er lig med $-m \cdot -n$. Vi har således vist, at $-n \cdot -m = -m \cdot -n$.

Ligger de to tal på hver sin side af 0, fremgår det direkte af definitionen, at $n \cdot -m = -m \cdot n$, så også her gælder kommutativiteten og derfor gælder der for alle hele tal, at $a \cdot b = b \cdot a$.

Opgave 5
Vi skal argumentere for, at det er mere besværligt end svært at bevise, at den associative lov gælder for addition af hele tal. Igen følger det næsten af definition 2, fordi den opdeler i tilfælde:

Definition af + og · for de hele tal:

For ethvert par ^-n, ^-m af negative tal defineres:

(definition 2. 8)) $^-n + {^-m} = {^-(n + m)}$

For n, ^-m defineres:

(definition 2. 10)) $n + {^-m}$ (og $^-m + n$) $= n - m$, hvis $m < n$, og

$n + {^-m}$ (og $^-m + n$) $= {^-(m - n)}$, hvis $n < m$.

Hvis vi skal vise, at den associative lov $a + (b + c) = (a + b) + c$ gælder for tre hele tal $a, b, c,$ så bliver vi nødt til at dele op i flere tilfælde.

') Hvis a, b, c er positive, så kan vi dog henholde os til vores viden fra de naturlige tal, altså vores formel 2). Så her er det nemt.

'') Hvis a, b, c alle er negative, så er det også nogenlunde overskueligt, fordi vores definition (definition 2. 8)) ikke forgrener sig ligesom definition 2. 10). For hvis de er negative, så kan vi sige, at de er lig med ^-n, ^-m og ^-r, hvor n, m, r er naturlige tal.

Vi skal altså vise, at $^-n + ({^-m} + {^-r}) = ({^-n} + {^-m}) + {^-r}$.

Vi regner på begge sider samtidig og finde ved hjælp af definition 2. 8), at påstanden er ensbetydende med:

$^-n + {^-(m + r)} = {^-(n + m)} + {^-r}$.

Da $(m + r)$ og $(n + m)$ fortsat er naturlige tal, kan vi bruge definition 2. 8) endnu en gang, og vi får, at vores udsagn er ensbetydende med:

$^-(n + (m + r)) = {^-((n + m) + r)}$.

Dette er sandt, fordi $n + (m + r) = (n + m) + r$ er sandt, fordi vi har vist den associative lov for de naturlige tals addition jf. formel 2), og hvis to tal er ens, så er de det også, hvis der sættes et minus foran, fordi at være ens betyder, at der er tale om det samme tal.

''') Hvis et af tallene er 0, fx a, så skal vi vise, at $0 + (b+c) = (0 + b) + c$. Bruges definition 1 (at 0 går ud af regnestykket) på addition med 0 på hver side, fås, at udsagnet reduceres til $b + c = b + c$, hvilket altid er sandt.

Opgave 5 fortsat
'''') Hvis *a, b, c* ligger lidt blandet på forskellig side af 0, så bliver der mange tilfælde at betragte på grund af definition 2.10). Lad os sige, at *a* er negativ (altså a = ^-n, hvor *n* er et naturligt tal) og *b* er et naturligt tal *m*, og *c* også er et naturligt tal *r*, så skal vi altså vise at :

$^-n + (m + r) = (^-n + m) + r$

Men vi kan ikke komme til at regne dette ud ifølge definition 2. 10) før vi har styr på, hvor stor *n* er i forhold til *m*. Lad os i første omgang antage, at $n < m$, så kan vi komme i gang med beregningen, idet vi så også ved, at $n < m + r$, hvorfor vi ved hvilken del af definition 2. 10) vi skal have fat i. Udsagnet ses at være ensbetydende med:

$(m + r) - n = (m - n) + r$, hvilket er indlysende for naturlige tal, idet der blot hævdes, at man kan tage *n* ud af en samling på $m + r$ ved at tage dem ud af de *m* og lade de *r* urørte[1]. Hermed har vi klaret '''') i et enkelt tilfælde.

Hvis man fortsætter beviset, vil man se, at der er mange tilfælde at gå igennem, men det er ikke fordi det bliver sværere, det er blot besværligt, så vi holder op her og opfordrer læseren til blot at klare et enkelt deltilfælde mere. Konklusionen skulle gerne være som i kapitlet om de negative tal, at alle de kendte regneregler faktisk gælder for disse hele tal.

[1] Dette afspejler strukturen i den nye læreruddannelse i Danmark, hvor vi først rigtig går i dybden med de naturlige tal i ε-bogen, der er aldersspecialiseret mod de mindre børn. Men i bevissammenhæng vil vi antage, at sådanne simple sammenhænge om regning med naturlige tal er velkendt for læseren, og det er vores afsæt for at bevise tilsvarende regler for de hele tal, der jo, som historien har vist, slet ikke er indlysende.

9. Algebraiske strukturer i skolen

Opgave 3
Hvis man vil tjekke, om man evt. selv har nogle af de mulige fejllæringer, kan man lige prøve at udpege de sande og de falske blandt følgende formler for reelle tal *a, b, c* og *d.*

$a^2 \geq a,\ \ \text{F}$

$\sqrt{a} \leq a$ (forudsat a > 0), F

$\dfrac{11a+7}{6a} = \dfrac{11+7}{6} = 3,\ \ \text{F}$

$\dfrac{a}{c} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{d},\ \ \text{F}$

$\sqrt{a^2 \cdot 16} = a \cdot 4$, hvis a er positiv, S

$\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$, hvis a er positiv, F

$b^3 + b^4 = b^7,\ \ \text{F}$

$4a^2 \cdot 2b^2 = 8a^2b^2\ \ \ \text{S}$

$4a^2 + 2b^2 = 6a^2b^2,\ \ \text{F}$

$\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2+c^2}} = \dfrac{a}{b+c}$, for a, b og c positive, F

Opgave 4
Ud fra den associative lov vises, at $(a + b) + (c + d) = a + (b + (c + d))$.

Vi sætter $c + d = e$ og får:
$(a + b) + e = a + (b + e)$ her indsættes $e = c + d$ igen
$= a + (b + (c + d))$, hvilket skulle vises.

På samme måde vises den tilsvarende lighed for multiplikation, idet vi her kalder $(c \cdot d)$ for e:
$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot b) \cdot e = a \cdot (b \cdot e) = a \cdot (b \cdot (c \cdot d))$.

Der er flere mulige måder at sætte parenteser på, men de viser sig alle at give samme resultat fx $((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$ eller $(a \cdot (b \cdot c)) \cdot d$.

Øvelse 1
1) Vi skal vise, at i ($\mathbb{Q}$, +, ·) gælder den kommutative lov for multiplikation, altså at

$$\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{a_1}{a_2}$$

Benyttes definitionen på multiplikation af brøker fås, at dette er ensbetydende med, at

$\frac{a_1 \cdot b_1}{a_2 \cdot b_2} = \frac{b_1 \cdot a_1}{b_2 \cdot a_2}$, som er sand, da den kommutative lov gælder i de hele tal, og da tallene i tæller og nævner er hele tal.

2) Det vises dernæst, at i ($\mathbb{Q}$, +, ·) gælder den associative lov for addition, altså at

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} + \left(\frac{b_1}{b_2} + \frac{c_1}{c_2}\right).$$

For at finde ud af om det giver samme resultat på hver side af lighedstegnet, bruger vi definitionen på addition af brøker to gange efter hinanden, og får først følgende ensbetydende udsagn:

$\left(\frac{a_1 b_2 + b_1 a_2}{a_2 b_2}\right) + \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} + \left(\frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{b_2 c_2}\right)$, og dernæst ved endnu en gang at bruge definitionen:

$$\frac{(a_1 b_2 + b_1 a_2) \cdot c_2 + c_1 \cdot (a_2 b_2)}{(a_2 b_2) \cdot c_2} = \frac{a_1 \cdot b_2 c_2 + (b_1 c_2 + c_1 b_2) \cdot a_2}{a_2 \cdot (b_2 c_2)}$$

Resten af vejen arbejder vi inden for de hele tal i tællerne og nævnerne i de to brøker. Her kan vi bruge, at multiplikation er associativ, så vi kan slette gangeparenteserne, og vi kan benytte den distributive lov til at gange ind i plusparenteserne, hvilket giver følgende ensbetydende udsagn:

$$\frac{(a_1 b_2 c_2 + b_1 a_2 c_2) + c_1 a_2 b_2}{a_2 b_2 c_2} = \frac{a_1 b_2 c_2 + (b_1 c_2 a_2 + c_1 b_2 a_2)}{a_2 b_2 c_2}$$

Her har vi som sædvanligt underforstået multiplikationstegnene mellem de indgående bogstavstørrelser/variable. Vi slutter af med at benytte, at addition er associativ, så vi kan undvære parenteserne, og endelig benytter vi, at multiplikation i de hele tal er kommutativ, så vi kan flytte rundt på faktorerne, så de kommer i akkurat samme orden på hver side:

$\frac{a_1 b_2 c_2 + b_1 a_2 c_2 + c_1 a_2 b_2}{a_2 b_2 c_2} = \frac{a_1 b_2 c_2 + b_1 a_2 c_2 + c_1 a_2 b_2}{a_2 b_2 c_2}$, hvilket er et åbenlyst sandt udsagn.

Da udsagnene har været ensbetydende og altså lige sande, så er også det første udsagn (fortsættes næste side)

Øvelse 1 fortsat

$\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{b_1}{b_2}\right)+\frac{c_1}{c_2}=\frac{a_1}{a_2}+\left(\frac{b_1}{b_2}+\frac{c_1}{c_2}\right)$ sandt. Altså er regnearten + også associativ, når vi regner inden for mængden af brøker eller rationale tal.

3) Vi skal vise, at tallet 1 er et neutralt tal i ($\mathbb{Q}$, $\cdot$), altså at $1\cdot\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot 1=\frac{a_1}{a_2}$:

Her benyttes, at 1 betragtet som brøk er lig med $\frac{1}{1}$, så

$1\cdot\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{1}\cdot\frac{a_1}{a_2}$, der ifølge definitionen på gange

$=\frac{1\cdot a_1}{1\cdot a_2}$, der, idet 1 er neutralt element ved multiplikation i $(\mathbb{Z},\cdot)$,

$=\frac{a_1}{a_2}$, hvilket skulle vises.

At der også gælder, at $\frac{a_1}{a_2}\cdot 1=\frac{a_1}{a_2}$ følger af den kommutative lov for multiplikation, som vi netop har vist.

4) Til sidst vises, at der findes inverse tal i ($\mathbb{Q}$, $\cdot$), altså at der til ethvert element $\frac{a_1}{a_2}$ findes et element, der ganget sammen med det, giver 1. Ud fra vores skolekendskab til brøker vil vi gætte på den omvendte brøk $\frac{a_2}{a_1}$. Men for at bevise at det er sandt, skal vi nu vise, at $\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=1$.

Her skal vi benytte det, vi har valgt som grundlaget for brøker, nemlig definitionen på multiplikation som angivet i definition 2: $\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_1 a_2}{a_2 a_1}$, hvilket pga. den kommunikative lov for multiplikation i de hele tal er en brøk $\frac{n}{n}$ med samme tal i tæller og nævner. Og en sådan er ifølge forkortningsreglen i definition 2 lig med $\frac{1}{1}=1$, hvilket skulle vises.

Opgave 5
Ud fra det grundlag, vi har givet omkring et legeme, skal vi bevise sætning 7, der siger, at man dividerer med et produkt ved at dividere med hver faktor.
Altså skal vi vise, at $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$, hvor *a, b, c,* er reelle tal.

$a:(b \cdot c)$ ifølge definition 3 af division
$= a \cdot (b \cdot c)^{-1}$ ifølge sætning 5
$= a \cdot (b^{-1} \cdot c^{-1})$ ifølge associative lov for multilikation
$= (a \cdot b^{-1}) \cdot c^{-1}$ ifølge definition 3 på division, anvendt to gange
$= (a:b):c$

Opgave 6
Vi skal først vise, at i et legeme gælder $a \cdot (-b) = -(ab)$.

Vi benytter, at $-(ab)$ pr. definition er det modsatte tal til ab, dvs. $-(ab)$ er det tal, der adderet til ab giver 0. Kan vi blot vise, at $a \cdot (-b)$ adderet til ab giver 0, så har vi vist, at $a \cdot (-b) = -(ab)$.

Vi prøver:
$a \cdot (-b) + ab$ idet vi benytter den distributive lov
$= a \cdot (-b + b)$ idet vi benytter at $-b$ er det modsatte tal til b
$= a \cdot 0$ idet[2] et tal ganget 0 giver 0
$= 0$

Dernæst skal vi vise, at $(-a) \cdot (-b) = ab$.

Dette kan gøres ved at gentage proceduren fra starten af opgave 6 to gange. Imidlertid vil vi her bygge argumentet op på sætning 1, der fortæller os, at det modsatte til det modsatte af a er a selv, $-(-a) = a$.

Det vi skal vise, ligner jo til en vis grad det, der sprogligt udtrykkes som "minus gange minus giver plus". Men fordi de to udtryk sprogligt ligner hinanden, siger de dog ikke helt det samme, så derfor giver vi nu et bevis for påstanden $(-a) \cdot (-b) = ab$.

$(-a) \cdot (-b)$ ifølge det netop viste (at minus foran b kan sættes foran hele leddet)
$= -((-a) \cdot b)$ ifølge den kommutative lov for multiplikation
$= -(b \cdot (-a))$ ifølge det netop viste (at minus fra anden faktoren kan sættes foran hele leddet)
$= -(-(b \cdot a))$ ifølge sætning 1
$= (b \cdot a)$ ifølge kommutative lov
$= ab$, hvilket skulle vises

[2] Denne såkaldte nulregel, at $a \cdot 0 = 0$ synes indlysende og er ganske velkendt fra skolens talverden. Læg dog mærke til, at den ikke fremgår direkte af definitionen på et legeme, så her kræves faktisk et bevis for, at den følger af definitionen på et legeme. Et bevis kan se således ud: $0 + 0 = 0$, idet 0 er neutralt element ved addition. Ganges nu med a på hver side og benyttes den distributive lov fås: $a \cdot 0 + a \cdot 0 = a \cdot 0$. Trækkes derefter $a \cdot 0$ på hver side fås $a \cdot 0 = 0$ som ønsket.

Opgave 6 fortsat
Det var muligvis lige så let at klare beviset ved at gentage forløbet fra første del af opgave 6. Men som et mønster for matematiske tankegang, så er det mere illustrativt, at vi beviser direkte i en kæde af lighedstegn, idet vi udnytter den information, vi har bygget op i sætninger og definitioner på de foregående sider. Det er almindelig skik og brug i matematiske fremstillinger, at man ikke bliver ved at gentage argumenter og beviser, men prøver at udnytte de sætninger, hvor argumenterne findes.

Øvelse 7
Ved at tage udgangspunkt i definition 5, skal vi vise, at sætning 12 gælder i det konkrete tilfælde:

$4^5 \cdot 4^{-2} = 4^{5+(-2)}$.

$4^5 \cdot 4^{-2} = 4^{5+(-2)}$ da 5 + -2 = 3, er det ensbetydende med

$4^5 \cdot 4^{-2} = 4^3$ da $4^{-2} = \frac{1}{4^2}$, er det ensbetydende med

$4^5 \cdot \frac{1}{4^2} = 4^3$ som ud fra betydningen af 4^5 og 4^2 er ensbetydende med

$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4} = 4^3$ der ved almindelig forkortning af en brøk er sandt, altså når vi frem til, at

$4^3 = 4^3$

Opgave 10
Hvis $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$ gælder for *x* og *y* som rationale tal og *a* som et positivt reelt tal, medfører det:

1) $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$. Dette vises på lignende måde som i eksempel 6, da vi får, at
$a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3})} = a^1 = a.$

Så $a^{\frac{1}{3}}$ er et tal, der ganget med sig selv tre gange giver *a*, men dette er definitionen på kubikroden af *a*, $\sqrt[3]{a}$, ifølge definition 6.

Opgave 10 fortsat

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Dette vises:

$\sqrt[n]{a^m}$ er pr. definition (definition 6) det tal, som ganget med sig selv n gange giver a^m . Så lad os udregne, om også $a^{\frac{m}{n}}$ har denne egenskab, altså om $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$.

Vi benytter, at reglen $a^x \cdot a^y = a^{(x+y)}$ (*) også gælder for x og y som brøker:

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ er ifølge definition 4

$= \underbrace{a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} \cdots\cdots a^{\frac{m}{n}}}_{n\ gange}$ er ifølge reglen (*)

$= a^{\underbrace{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\cdots+\frac{m}{n}}_{n\ gange}}$

$= a^m$, hvilket skulle vises.

Opgave 13

Ifølge sætning 16 har vi, at $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ *og* $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$. Heraf fås:

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} = a^{\frac{n+m}{nm}}$, hvor vi i andet lighedstegn har benyttet reglen (*) og i det tredje almindelige brøkregning med fællesnævner. Beregningen viser, at det er muligt at gange fx kvadratroden af et tal med kubikroden af det samme tal, men der gælder ikke nogen let og pæn regel som ved opløftning til potens.

10. Ligninger og uligheder

Øvelse 1

4) $2\pi x + 17\pi = 39\pi,\ x = \dfrac{22\pi}{2\pi} = 11$

5) $\left(\sqrt{3}-1\right)x+4=4\sqrt{3},\ x=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=4$

6) $\left(\sqrt{3}-1\right)x+4=6,\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{3-1}=\sqrt{3}+1$

Opgave 4

Her giver vi et eksempel på løsning af tre ligninger med tre ubekendte ved substitutionsmetoden.

I bogen er der en fejl i opgavens første linje, der skal stå $2x$ i stedet for $2z$.

(1) $2x + 5y + 10z = 65$
(2) $x + y + z = 17$
(3) $3x + 7y + 2z = 69$

Vi starter med en ligning hvor vi kan få et simpelt udtryk for en af de variable ud fra de to andre, fx i (2), hvor vi kan finde z udtrykt ved x og y: $z = 17 - x - y$

Dette udtryk for z indsættes nu i (1) og (3), hvorved hele ligningssystemet reduceres til to ligninger med to ubekendte:

Vi indsætter $z = 17 - x - y$ i (3) og får $3x + 7y + 2(17 - x - y) = 69$ eller $x + 5y = 35$.

Vi indsætter så $z = 17 - x - y$ i (1) og finder x udtrykt ved y: $2x + 5y + 10(17 - x - y) = 65$ eller $8x + 5y = 105$

Vi har altså reduceret ligningssystemet til to ligninger med to ubekendte:
I: $x + 5y = 35$
II: $8x + 5y = 105$

De løses på en af de flere måder – fx ved fra I at indsætte $x = 35 - 5y$ i II , hvorved vi får:

$8(35 - 5y) + 5y = 105$, hvilket giver $35y = 175$ eller $y = 5$.

Indsat i I fås $x = 10$, hvorefter z findes af: $z = 17 - x - y$ til at være 2.

I opgaven får vi oplyst, at $x = y \cdot z$. Dette tjekkes: $10 = 5 \cdot 2$, hvilket er korrekt. Men vi kunne med større ret have 'gjort prøve' ved at indsætte de tre løsninger i de oprindelige ligninger, hvilket også stemmer.

Opgave 7

Først et eksempel:

(1) $3x + 6y = 17$
(2) $2x + 4y = 13$

Determinanten $= 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 = 0$

Det er let at se, at ved at multiplicere (2) med 1,5 får de to ligninger ens koefficienter til x og y, idet ligningerne bliver til:

(1) $3x + 6y = 17$
(2) $3x + 6y = 19½$

Det er samtidig indlysende, at dette ligningssystem ikke kan have løsninger, for hvis der fandtes en løsning, så ville venstresiderne blive ens og dermed også højresiderne, hvilket ville føre til, at 17 = 19½, hvilket er direkte falsk.

Vi ser nu på en generel situation:

$ax + by = e$
$cx + dy = f$

Her er determinanten pr. definition $D = a \cdot d - b \cdot c$, Hvis determinanten skal være lig 0, så skal $a \cdot d = b \cdot c$. Dette er ensbetydende med (ved division med $d \cdot c$ på hver side), at $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

Lad os kalde størrelsen af denne (ens) brøk for t, altså $\frac{a}{c} = t$ og $\frac{b}{d} = t$ eller $a = t \cdot c$ og $b = t \cdot d$

Koefficienterne i den ene ligning er altså proportionale med koefficienterne i den anden ligning.

Hvis omvendt det fra begyndelsen er oplyst, at koefficienterne således er proportionale, altså $a = t \cdot c$ og $b = t \cdot d$ for et passende tal $t \in \mathbb{R}$, så bliver determinanten også lig med 0.
Vi har nemlig pr. definition, at $D = a \cdot d - b \cdot c$, som beregnes videre til $tc \cdot d - td \cdot c = 0$.

Begrundelse for ingen eller uendelig mange løsninger er akkurat som i eksemplet ovenfor.
Ser vi på eksemplet og evt. tegner graferne, de rette linjer, ind i et koordinatsystem, får vi, da ligningernes venstre sider er ens, at de to linjer er parallelle. Men da de højre er forskellige skærer de y-aksen forskellige steder og skærer altså slet ikke hinanden. Altså har de ingen skæringspunkter, og ligningssystemet har ingen løsning.

Hvis determinanten er lig 0, og både venstre- og højresiderne ved passende multiplikation af den ene ligning kan bringes til at blive ens, så er de to ligninger identiske. Enhver løsning til den ene ligning vil da også være en løsning til den anden. Dette giver uendeligt mange løsninger, svarende til alle punkterne på grafen (den rette linje) for den ene ligning.

Opgave 9

1) $x + 5 = 12$, hvor x er det tal 'jeg' tænker på.

2) $2x + x = 21$, hvor x er Luises alder.

3) For 10 år siden havde min lillesøster alderen x, jeg $2x$ og min storebror $4x$. I dag er alle 10 år ældre og er nu 44 år tilsammen. Heraf fås ligningen:

$(x + 10) + (2x + 10) + (4x + 10) = 44$, hvor x er 'min lillesøsters alder', hvorfor fx $(2x + 10)$ er min alder i dag.

4) x = stykprisen for F(rugt), y = stykprisen for B(oller), z = stykprisen for M(ælk), hvoraf der mandag sælges noget af F, B og M. Det oplyses, at $z = 3x$.

Dette giver følgende salgsopgørelser/ligninger for de tre første ugedage:

Mandag: $F \cdot x + B \cdot y + M \cdot z$ = mandags omsætning
Tirsdag: $(F + 40)x + (B - 20)y + M \cdot z$ = samme omsætning som mandag
Onsdag : $80 \cdot x + 150 \cdot y + 100 \cdot x = 680$.

Vi kan sætte de to venstresider for mandag og tirsdag lig hinanden, da højresiderne er ens:
$F \cdot x + B \cdot y = (F + 40)x + (B - 20)y$,
eller $0 = 40x - 20y$.

Heraf får vi, at $y = 2x$, dvs. bollerne er dobbelt så dyre som frugt. Kombineres dette med den givne oplysning om, at $z = 3x$, kan vi finde x af ligningen for onsdag, hvor i udtrykkene for y og z indsættes:

$80 \cdot x + 150 \cdot 2x + 100 \cdot 3x = 680$, som er ensbetydende med $680 \cdot x = 680$ eller $x = 1$, hvorefter vi får priserne for frugt, boller og mælk til at være hhv. 1 kr. , 2 kr. og 3. kr.

Øvelse 11
1)

$|2x - 1| < 3$ er ensbetydende med: $-3 < 2x - 1 < 3$ eller for at slå det helt fast:

Der skal samtidig gælde $-3 < 2x - 1$ og $2x - 1 < 3$, hvilket er ensbetydende med,

at der samtidig skal gælde, at $-2 < 2x$ og $2x < 4$, hvilket er ensbetydende med,

at der samtidig skal gælde, at $-1 < x$ og $x < 2$, hvilket er ensbetydende med, at løsningsmængden er intervallet]-1,2[

Hvis man er meget fortrolig med andengradspolynomier kan man også vælge en mere avanceret metode, hvilket dog her i den indledende behandling af uligheder må anses for 'at skyde spurve med kanoner':

$|2x - 1| < 3$ ved kvadrering på begge sider af lighedstegnet og udregning er det ensbetydende med

$4x^2 - 4x - 8 < 0$ ved division med 4 er det ensbetydende med

$x^2 - x - 2 < 0$

$x^2 - x - 2 = 0$ har løsningerne x = 2 eller x = -1, og parablens grene vender opad. Altså ligger den under x-aksen og mellem rødderne. Løsningsmængden for vores ulighed er altså:

$-1 < x < 2$

i overensstemmelse med resultatet fra den mere elementære metode.

Øvelse 11 fortsat

2)

$$\frac{1}{2x-1}<3$$

Det er en betingelse, at $2x-1\neq 0$, altså $x\neq\frac{1}{2}$.

Derefter regner vi på de to tilfælde, hvor $2x-1$ er hhv. større eller mindre end 0.

1. tilfælde, hvor $2x-1>0$:

$2x-1>0$, hvilket er det samme som $x>\frac{1}{2}$. Vi har lov til at gange med et positivt tal på hver side af et ulighedstegn, og ved udregning får vi:

$\frac{1}{2x-1}<3$ er ensbetydende med, at $x>\frac{2}{3}$.

For $2x-1>0$ er løsningen: $x>\frac{2}{3}$.

2. tilfælde, hvor $2x-1<0$:

$2x-1<0$, hvilket er det samme som $x<\frac{1}{2}$. Vi skal vende ulighedstegnet, når vi ganger med et negativt tal, og ved udregning får vi:

$\frac{1}{2x-1}<3$ er ensbetydende med, at $1>3(2x-1)$, og dermed $x<\frac{2}{3}$.

For $2x-1<0$, er løsningen foreløbig, at $x<\frac{2}{3}$, samtidig havde vi, at $x<\frac{1}{2}$, dvs. for $2x-1<0$ er løsningen: $x<\frac{1}{2}$.

Den samlede løsning: $x<\frac{1}{2}$ eller $x>\frac{2}{3}$. Bemærk, at vi hermed også opfylder betingelsen for $x\neq 0$.

Øvelse 12

4)
$\sqrt{2}\cdot x-\sqrt{2}<2\sqrt{2}\cdot x-1$ ved subtraktion af $-\sqrt{2}\cdot x$ og addition af 1 på begge sider af ulighedstegnet er det ensbetydende med

$1-\sqrt{2}<\sqrt{2}x$ ved division med $\sqrt{2}$ (som er positiv) på begge sider af ulighedstegnet er det ensbetydende med

$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}<x$ som ved multipliktion med $\sqrt{2}$ i tæller og nævner på venstre side og forkortning er ensbetydende med

$\frac{\sqrt{2}}{2}-1<x$

Opgave 10

$(x-5)(x-8)<0$

Hvis produktet af to faktorer skal blive mindre end 0, skal netop en af faktorerne være negativ. For at dette skal være opfyldt må vi have $x > 5$ og $x < 8$. Løsningen bliver således: $5 < x < 8$.

Opgave 18

Kavalerister = K
Artillerister = A = 3K
Infanterister = I = 4A = 4 · 3K

K + 3K + 12K = 16 K

16K = 3.520, hvoraf vi får K = 220

Antal kavalerister = K = 220
Antal artillerister = 3K = 660
Antal infanterister = 4A = 2640

Opgave 20

Vi tænker på et tal og kalder det x. Adderer 4 til x, multiplicerer med 3, subtraherer 9, dividerer med 3 og endelig subtraherer x, og vi har resultat 1.

I symboler:
$((x + 4)\cdot 3) - 9) : 3 - x = 1$

11. Funktioner og funktionsbegrebet

Øvelse 3

1) Den direkte proportionalitet *f*, hvor $f\left(\frac{22}{7}\right)=\frac{3}{5}$, angives:

$x=\frac{22}{7}$ og $f(x)=\frac{3}{5}$ indsættes i $f(x)=ax$,

hvilket giver $f(x)=\frac{21}{110}x$.

2) Den omvendte proportionalitet *g*, hvor $g\left(\frac{22}{7}\right)=\frac{3}{5}$, angives:

$x=\frac{22}{7}$ og $g(x)=\frac{3}{5}$ indsættes i $g(x)=\frac{k}{x}$, hvilket giver $k=\frac{66}{35}$ og dermed $g(x)=\frac{66}{35}\cdot\frac{1}{x}$.

3) Den lineære funktion, hvis graf indeholder punkterne $\left(\frac{22}{7},\frac{3}{5}\right)$ og $\left(\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right)$ findes:

Hældningskoefficienten α findes ved at indsætte punkternes koordinater i $\alpha=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$, hvilket giver $\alpha=-\frac{126}{335}$.

α samt det ene punkts koordinater indsættes i : $y=\alpha x+b$,
hvilket giver $y=h(x)=-\frac{126}{335}x+\frac{597}{335}$.

4) a. Billedmængden for *f* svarende til $x\le 0$: Vi har $f(x)=\frac{21}{110}x$. For $x\le 0$ bliver højre side negativ eller 0, dvs. billedmængden af $x\le 0$ bliver det negative reellele tal samt 0, eller udtrykt i mængdelærens sprog: $\{y\in\mathbb{R}\mid y\le 0\}$.

b. Billedmængden for *g* svarende til $x\le 0$: Vi har $g(x)=\frac{66}{35}\cdot\frac{1}{x}$. Her må vi undgå x = 0 for at undgå x i nævneren. Men x < 0 svarer til at x gennemløber alle negative tal, hvilket er ensbetydende med, at $\frac{1}{x}$ gennemløber alle negative tal og dermed også, at $g(x)$ gennemløber alle negative tal. Billedmængden bliver altså de negative reelle tal eller i mængdelærens sprog: $\{y\in\mathbb{R}\mid y<0\}$.

Øvelse 3 fortsat

c. Billedmængden for h når $x \leq 0$: Vi har $h(x) = -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335}$.

Tænker vi på det som en ret linie med negativ hældning, der skærer y-aksen i punktet (0, $\frac{597}{335}$) får vi, at det, der ligger i 2. kvadrant og over den rette linje, udgør billedmængden. Mere præcist bliver billedmængden $\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \frac{597}{335} \}$.

Dette kan også skrives detaljeret med brug af de regler der gælder for manipulation med uligheder og som vi så på i forrige kapitel:

$$x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{126}{335}x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335} \geq \frac{597}{335} \Leftrightarrow h(x) \geq \frac{597}{335}$$

Opgave 7

Det viser sig, at der i værste tilfælde skal tre punkter til at afgøre, om der er tale om en ligefrem proportionalitet: $f(x) = x$, en omvendt proportionalitet: $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$ eller den lineære funktion: $f(x) = ax + b$.

Hvis man ved hvilken af de tre typer der er tale om, er det nok med to punkter. Så ud fra to punkter kan man få fastlagt helt konkret, hvilken funktion der kan være tale om inden for hver kategori.

Er man usikker på, hvilken type der er tale om, indsætter man det tredje punkt i hver af de mulige, og det vil kun stemme i en af dem, hvorefter man har bestemt typen og kan fastlægge den konkrete funktion.

Der kan blive problemer med specialtilfælde, så lad os præcisere, at vi ikke regner $y = \frac{k}{x}$ for en omvendt proportionalitet, hvis k = 0.

At to forskellige typer af disse funktioner ikke kan skære hinanden i tre forskellige punkter er indlysende ud fra grafernes geometriske form, men det bliver lidt mere besværligt, hvis man skal vise det algebraisk.

Øvelse 10
Da vi opløfter a til vilkårlige potenser x, er det underforstået, at a altid er et positivt tal i hele kapitlet om eksponentielle funktioner.

Vi skal altså vise, at det positive tal a kan bestemmes som $a = \sqrt[(x_2-x_1)]{\frac{y_2}{y_1}}$, når koordinaterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2) for to punkter på grafen er givet.

Vi har, at $y = b \cdot a^x$, heri indsættes punkternes koordinater:

(1) $y_1 = b \cdot a^{x_1}$
(2) $y_2 = b \cdot a^{x_2}$

Ved division af (2) med (1) fås:

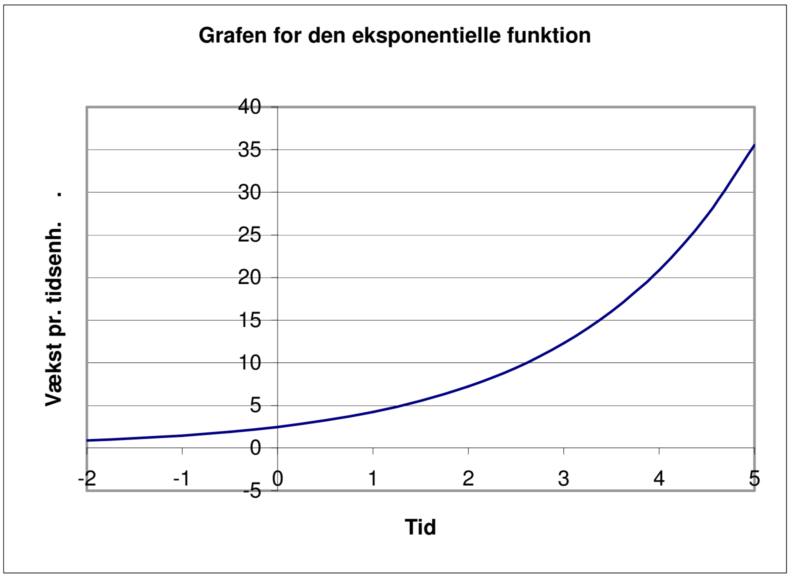
$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$ som ved forkortning med b er ensbetydende med

$\frac{y_2}{y_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}}$ som ved anvendelse af potensregneregler er ensbetydende med

$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2-x_1}$ der, idet vi uddrager den $(x_2 - x_1)$'te rod på begge sider af lighedstegnet, er ensbetydende med

$\sqrt[(x_2-x_1)]{\frac{y_2}{y_1}} = a$, hvilket skulle vises.

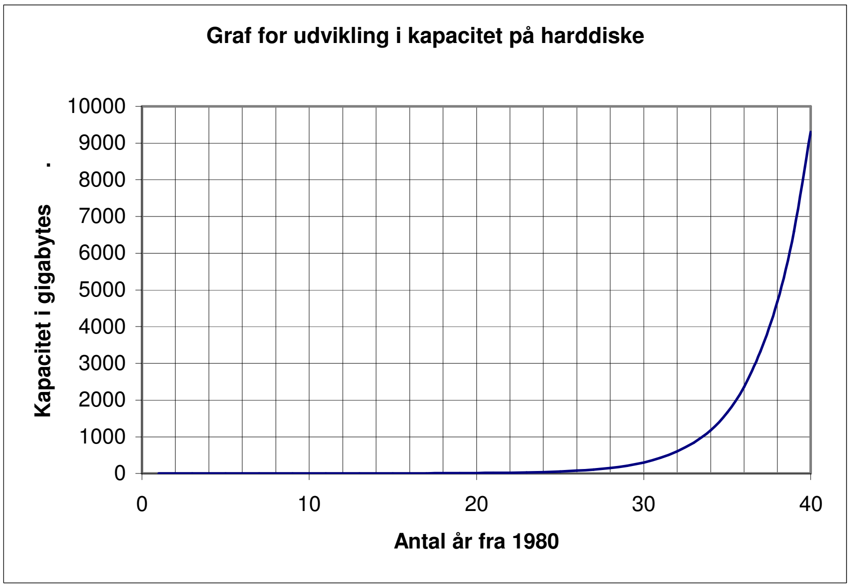
Øvelse 11



Relativ vækst pr. tidsenhed er det samme som procentvis vækst.
Vi har a = 1,7 dvs. den procentvise vækst er lig 70%, og vækstfaktoren er 1,7.

Den procentvise vækst medregner kun den faktiske vækst, men vækstfaktoren, som også kaldes fremskrivningsfaktoren, indeholder de 100%, vi allerede har og derfor i tilfælde af positiv vækst ofte har formen 1,…, hvor tallet 1 står for det, vi allerede har. Fx ses ofte vækstfaktoren 1,05 for, hvor meget en sum vokser til, når den tilskrives 5% i renter pr. tidsenhed. Her står 1 for den sum, der får renter tilskrevet.

Øvelse 13



Vi har, at $y = 0,01 \cdot 1,41^x$, hvor x er antallet af år siden 1980, og y er kapaciteten i gigabytes.
Prognose: I år 2020 (1980 + 40) vil kapaciteten ved denne fremskrivning være på:
$y = 0,01 \cdot 1,41^{40} \approx 9.306$ gigabytes.

Øvelse 17
Vi skal finde en forskrift for en funktion *f*, der angiver eksponentiel vækst.

Vi har oplysninger, der kan opfattes som koordinatsæt til to punkter på en graf for funktionen: (10; 2,3) og (20; 2,7). Disse indsættes i formlen:

$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$, og vi får $a \approx 1{,}016$

Værdien for a samt koordinatsættet for et af punkterne indsættes i $f(x) = b \cdot a^x$, og vi få $b \approx 1{,}959$ og $f(x) = 1{,}959 \cdot 1{,}016^x$.

Overskuddet ved salget findes ved at sætte $x = 0$: $f(x) = 1{,}959 \cdot 1{,}016^0 = 1{,}959$, dvs. næsten 2 mio. kr.

Øvelse 22
Vi har, at $y = 1480 \cdot 10^{-0{,}00436x}$, hvor x står for dage. Vi skal bestemme halveringstiden.

For $x = 0$ har vi, at $y = 1480 \cdot 10^{-0{,}00436 \cdot 0} = 1480$.

Kaldes halveringstiden for x er kravet, at aktiviteten til tiden x skal være det halve af 1480, altså 740:

$1480 \cdot 10^{-0{,}00436x} = 740$ som ved division med 1480 på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$10^{-0{,}00436x} = \frac{1}{2}$ der ved at tage logaritmefunktionen på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$\log\left(10^{-0{,}00436x}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$ ved anvendelse af regneregler for logaritmer er dette ensbetydende med

$-0{,}00436x \cdot \log 10 = \log 1 - \log 2$ der ved opslag af log 2 er ensbetydende med

$-0{,}00436x \cdot 1 = 0 - 0{,}3010$ der ved anvendelse af almindelige regneregler er ensbetydende med

$x = \frac{-0{,}3010}{-0{,}00436} \approx 69{,}037$ Halveringstiden er ca. 69 dage

Herefter skal vi finde, hvor lang tid det tager, før end aktiviteten er faldet til 1. Vi opstiller ligningen:

$1480 \cdot 10^{-0{,}00436x} = 1$ og løser den på samme måde som ovenfor.

Løsning: $x \approx 727{,}12$ Altså tager det ca. 727 dage eller 2 år at nå et sikkert niveau.

Opgave 14

Vi skal vise, at for halveringstiden $T_{½}$ gælder formlen $T_{½} = \frac{\log 2}{k}$, når vi har, at $Y = A \cdot 10^{-kx}$.

For x = 0 har vi aktiviteten: $Y = A \cdot 10^{0} = A$

Til tiden $T_{½}$ skulle aktiviteten være faldet til det halve: $A \cdot 10^{-kx} = \frac{1}{2}A$, hvilket vi regner på:

$A \cdot 10^{-kx} = \frac{1}{2}A$ der ved division med *A* på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$10^{-kx} = \frac{1}{2}$ der ved at tage logaritmefunktionen på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$\log\left(10^{-kx}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$ ved anvendelse af regneregler for logaritmer er dette ensbetydende med

$-kx \cdot \log(10) = \log(1) - \log(2)$ der, idet log(10) er lig 1 og log(1) er lig 0, er ensbetydende med

$-kx \cdot 1 = 0 - \log(2)$ der ved anvendelse af almindelige regneregler er ensbetydende med

$x = \frac{-\log(2)}{-k} = \frac{\log(2)}{k}$, hvilket skulle vises.

Øvelse 23

1) Arealet x af et kvadrat er kvadratet på siden, altså $s^2 = x$. Uddrages kvadratroden på hver side (eller opløftes til $\frac{1}{2}$) fås $s = x^{\frac{1}{2}}$, hvilket er en potensfunktion (b = 1 og a = $\frac{1}{2}$).

2) Rumfanget x er lig med sidelængden i tredje potens. Ved at uddrage den tredje rod på hver side fås på lignende vis som under 1), at sidelængden er rumfanget opløftet til en tredjedel, hvilket er en potensfunktio: $x = l^3 \Leftrightarrow l^3 = x \Leftrightarrow l(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

3) Overfladen af en terning består af 6 sideflader hver med arealet x^2. Vi finder derfor: $o(x) = 6 \cdot x^2$, hvilket er en potensfunktion (b = 6 og a = 2).

Øvelse 23 fortsat

4) Vendes formlen fra 3) omvendt fås $x=\left(\frac{o}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$, eller hvis vi respekterer, at det nu er overflade-arealet, der skal være den variable *x*: $s=\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dette indsættes i rumfangsformlen $R=s^3$, hvorefter vi finder $r(x)=\left[\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3=\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Dette udtryk har ikke umiddelbart form som en potensfunktion, men bliver det, hvis vi sætter konstanten ud for foran ved at opløfte tæller og nævner hver for sig til potensen $\frac{3}{2}$:

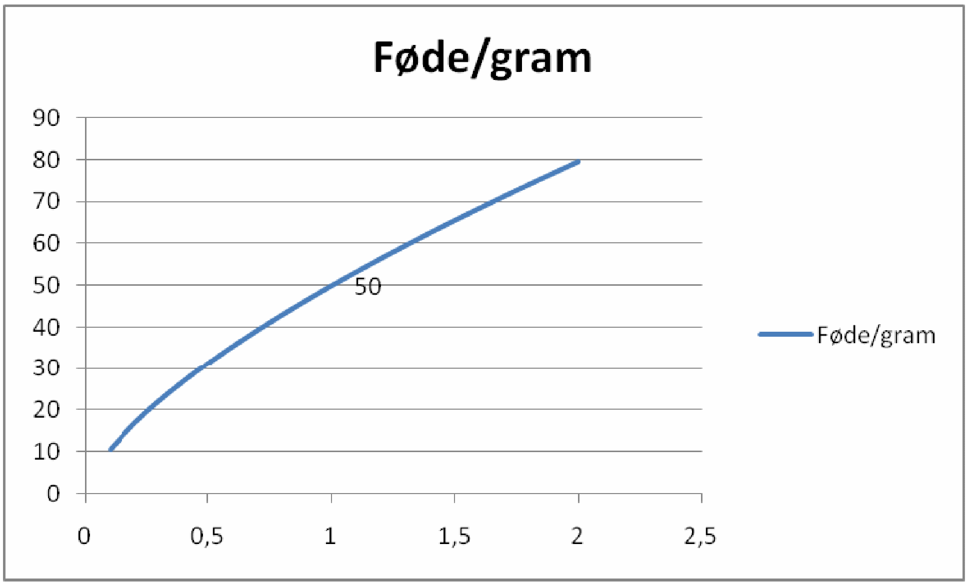
$$r(x)=\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{1}{6^{\frac{3}{2}}}\cdot x^{\frac{3}{2}}=6^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{3}{2}}=3,3019\cdot x^{\frac{3}{2}},$$

hvilket er en potensfunktion med b = 3,3019 og $a=\frac{3}{2}$.

Opgave 17

Vi kan kun skitsere funktionen, hvis vi ved hvad fødeindtaget er ved en given vægt. Lad os sige at det er på 50 gram for en ørred på 1 kg. Så bliver funktionen $y=50\cdot x^{0,67}$, hvis graf ser således ud.

Vægt/kilo	Føde/gram
0,1	11
0,2	17
0,3	22
0,4	27
0,5	31
0,6	36
0,7	39
0,8	43
0,9	47
1	50
1,1	53
1,2	56
1,3	60
1,4	63
1,5	66
1,6	69
1,7	71
1,8	74
1,9	77
2	80



Opgave 17 fortsat

2) En dobbelt så stor fisk indtager $2^{0,67} = 1,59$ gange så meget som den mindre eller 59% mere. Dette er ganske uafhængigt af vores gæt på fødeindtag på 50 gram for en fisk på 1 kg, og det er også uafhængigt af den mindre fisks vægt, fordi $\frac{(2x)^{0,67}}{x^{0,67}} = \frac{2^{0,67} \cdot x^{0,67}}{x^{0,67}} = 2^{0,67} = 1,59$.

3) Nu ønsker vi, at regnestykket skal ende på 2,00 i stedet for 1,59. Til gengæld er vægten ganget med en anden faktor *f*, så vi får i lighed med 2):

$\frac{(fx)^{0,67}}{x^{0,67}} = \frac{f^{0,67} \cdot x^{0,67}}{x^{0,67}} = f^{0,67} = 2$, hvor det centrale bliver ligningen $f^{0,67} = 2$.

I skolen bliver man nødt til at prøve sig frem på lommeregneren eller regneark, fx giver $3^{0,67} = 2,0877$, så man ser, at svaret er tæt på 3. Men kender man lidt mere til potensopløftning ved man, at man kan opløfte til $\frac{1}{0,67}$ på hver side og få $f = 2^{1/0,67} = 2,81$. Så svaret bliver, at en 2,81 gange så stor en fisk optager dobbelt så meget føde på en dag som den mindre fisk.

4) Vi så i øvelse 23, at længden $l(x)$ af en terning som funktion af rumfanget x var $l(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Tænker vi os en model af en fisk bygget af centicubes, indser vi, at også en fisks lineære mål med en vis ret kan siges at vokse proportionalt med $x^{\frac{1}{3}}$. Da endvidere vægt og rumfang af en fisk må antages at være proportionale (faktisk næsten 1, da fisk har en vægtfylde tæt på 1), kan vi antage, at fiskens lineære mål er proportionale med $x^{\frac{1}{3}}$, hvor x er fiskens vægt. Da mundens areal voksen med de lineære mål i anden potens (tænk igen på at måle mundens tværsnitsareal med små kvadrater (millimeterpapir), er det ikke urimeligt at antage, at fødeindtaget vokser proportionalt med

$(x^{\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}}$

Bemærk, at hele argumentationsformen her er meget anderledes end i de tidligere opgaver, idet der her er tale om anvendt matematik eller mere præcist 'modellering'. Vi prøver så godt vi kan at opstille en model af en ørreds opførsel/fødeindtag, som vi kan forestille os, det udvikler sig som funktion af ørredens vægt. Det er mere en opgave for en biolog end for en matematiker, fordi man skal vide noget om virkelighedsområdet, man modellerer. Det forbavsende er imidlertid, at vores meget matematiske idealiserede tilgang til problemet faktisk giver den løsning, som biologer og dambrugere bruger i deres hverdag.

Opgave 18
Vi opskriver betingelsen for at de to punkter tilfredsstiller potensfunktionen:

$$y_1 = b \cdot x_1^{\ a}$$
$$y_2 = b \cdot x_2^{\ a}$$

Vi lader nu logaritmefunktionen virke på hver ligning og benytter, at logaritmen til et produkt bliver summen af logaritmerne, samt at $\log(x^a) = a \cdot \log(x)$, og får:

$$\log(y_1) = \log(b \cdot x_1^{\ a}) = \log(b) + \log(x_1^{\ a}) = \log(b) + a \cdot \log(x_1)$$
$$\log(y_2) = \log(b \cdot x_2^{\ a}) = \log(b) + \log(x_2^{\ a}) = \log(b) + a \cdot \log(x_2)$$

Vi vil kun interessere os for slutresultatet:

$$\log(y_1) = \log(b) + a \cdot \log(x_1)$$
$$\log(y_2) = \log(b) + a \cdot \log(x_2)$$

Trækkes den øverste ligning fra den nederste fås: $a = \dfrac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$ og $b = \dfrac{y_1}{x_1^{\ a}}$.

Øvelse 27
1) Alle positive arealer er mulige, så værdimængden er lig $\mathbb{R}_+$.

2) Definitionsmængden for *f* er mængden af alle mennesker, der er søskende. (En lidt ulden opgave!)

Øvelse 29
1) Vi skal vise, at for ethvert *y* har ligningen $y = 3x - 5$ netop en løsning i *x*.

$y = 3x - 5$

$\Leftrightarrow 3x = y + 5$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{y+5}{3}$, hvilket er netop en løsning.

2) Vi skal her vise, at ligningen $y = x^2$ har netop en positiv reel løsning i *x*, hvis *y* er et givet positivt reelt tal.

$y = x^2$ Vi kan uddrage kvadratroden på hver side af lighedstegnet, da alt er positivt.

$\Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x^2}$ Da alt er positivt

$\Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, hvilket er netop en løsning.

Øvelse 29 fortsat
3) Vi skal vise, at ligningen $y = x^3$ har netop en løsning. Vi lader y være et vilkårligt reelt tal.

$y = x^3$ idet vi uddrager den 3. rod på begge sider af lighedstegnet
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3}$
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{y} = x$
$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}$, hvilket er netop en løsning, da der ikke er problemer med at uddrage den 3. rod af negative tal.

Den sidste del af opgaven overlades til læseren.

Øvelse 33

Vi har $f(x) = 2x+5$ og $g(x) = 3x-4$

Vi skal vise:
1) $(g \circ f)(x) = 6x+11$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x+5) = 3(2x+5)-4 = 6x+11$, hvilket skulle vises.

2) $f^{-1}(y) = \dfrac{y-5}{2}$
$f(x) = 2x+5$, vi isolerer x og får $x = \dfrac{y-5}{2} = f^{-1}(y)$, hvilket skulle vises.

Og vi skal finde:
3) $(f \circ g)(x)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x-4) = 2(3x-4)+5 = 6x-3$

4) $g^{-1}(x)$

$g(x) = 3x-4$, vi isolerer x og får $x = \dfrac{y+4}{3} = g^{-1}(y)$, hvilket normalt skrives $g^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{3}$

Øvelse 34
1) Holder vi os strengt til definitionen, løses opgaven således:
Vi vælger $A = B = \mathbb{R}_+$, $a \in A$, $b \in B$, $x \in \mathbb{R}_+$. $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$.
Funktionen f^{-1} er defineret ved $f^{-1}(b) = a$, hvis $f(a) = b$. Men $f(a) = a^2$, så $b = a^2$ eller $a = \sqrt{b}$. Sammenholdes det med $f^{-1}(b) = a$ fås $f^{-1}(b) = \sqrt{b}$, altså $f^{-1}(b) = g(b)$, så $f^{-1} = g$.

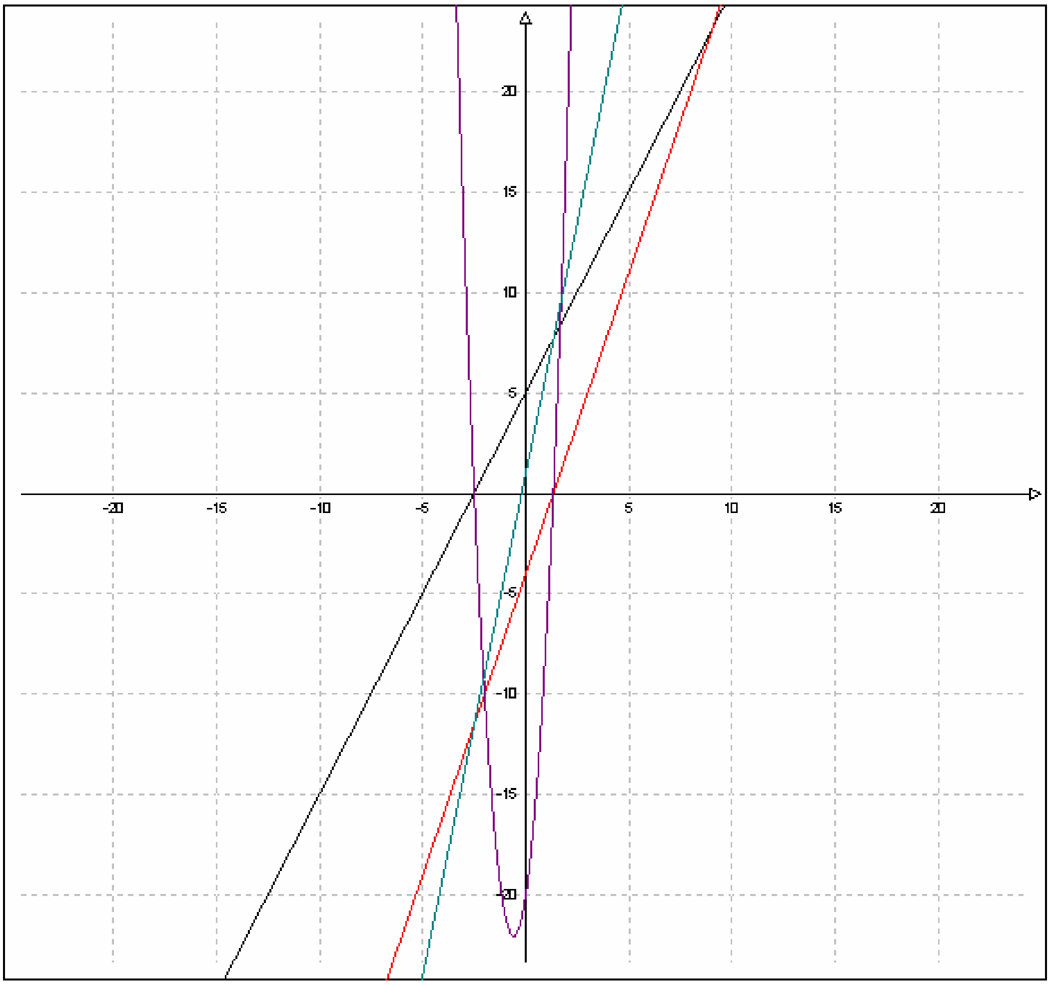
2) Den sædvanlige måde at vise, at f og g er hinandens inverse, er at $f \circ g(x) = f(g(x)) = x$:
$f \circ g(x) = f(g(x) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$, og tilsvarende for $g \circ f(x) = x$.

Øvelse 35

Vi har $f(x) = 2x + 5$ (sort) og $g(x) = 3x - 4$ (rød)

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = 2x + 5 + 3x - 4 = 5x + 1$ (grøn)

$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (2x + 5)(3x - 4) = 6x^2 + 7x - 20$ (lilla)



Opgave 25

$f(x_1, x_2) = (-x_1, -x_2)$. For at vise, at denne funktion er sin egen inverse, er det tilstrækkelig at vise, at $f \circ f(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Altså:

$$f \circ f(x_1, x_2) = f(f(x_1, x_2)) = f(-x_1, -x_2) = (-(-x_1), -(-(x_2)) = (x_1, x_2).$$