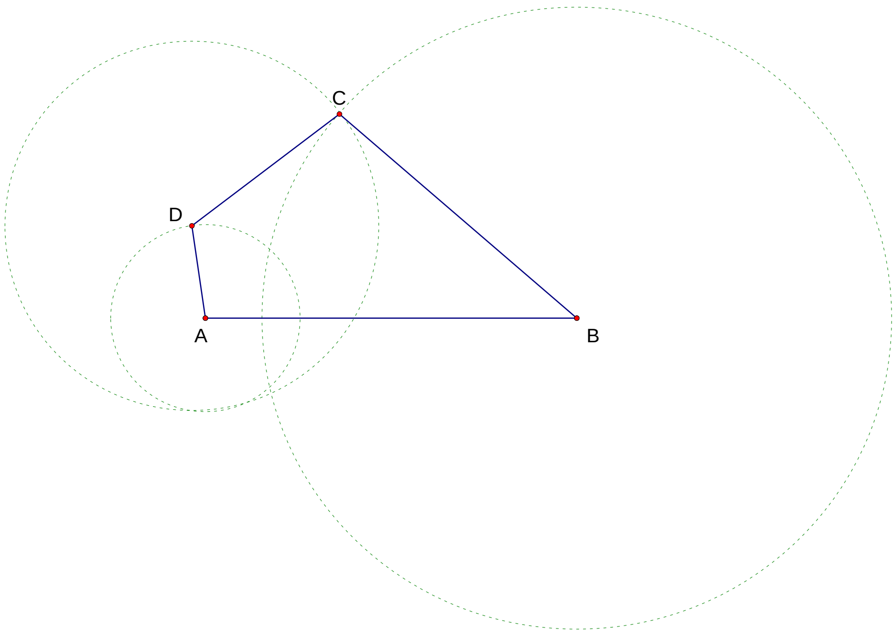
Løsningsforslag til Geometri 4.-10. klasse

Bemærk, at vi benytter betegnelsen øvelser som en meget bred betegnelse. Derfor er der også nogle af vores øvelser, der nærmer sig kategorien 'undersøgelser', dem giver vi som oftest ikke løsningsforslag til, ligesom svar til kategorien 'overvej-diskuter' ikke giver megen mening.

Kapitel 1 Eksperimentel geometri

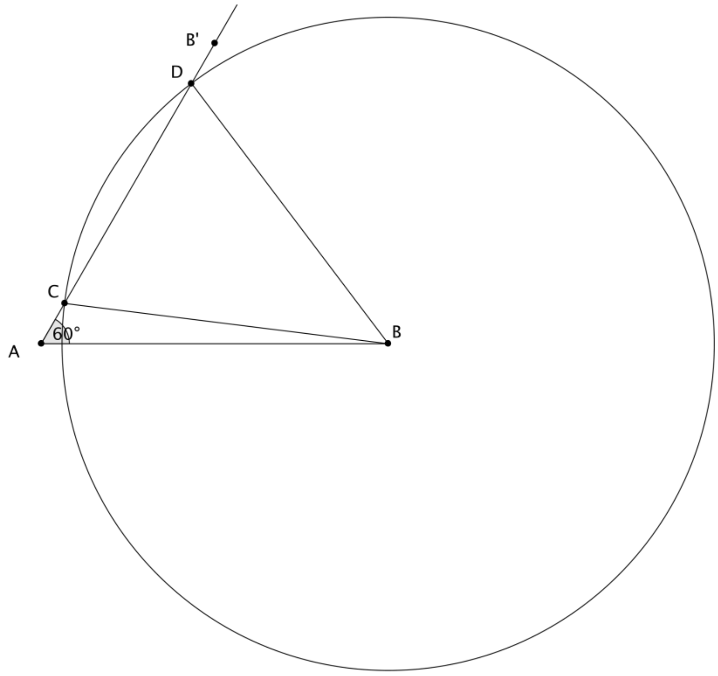
Øvelse 1

3) Der er uendeligt mange løsninger. Den viste er fundet ved at afsætte et linjestykke *AB* på 20 cm, tegne en cirkel med centrum i *B* og radius 17 cm, tegne en cirkel med centrum i *A* og radius 5 cm. Dernæst bestemmes to punkter *C* og *D* på de to cirkelperiferier, hvor afstanden er 10 cm, idet man vælger *D* på den lille cirkel og bruger *D* som centrum for en cirkel med radius 10 cm, som skærer den store cirkel i *C*.



Øvelse 2

5) Linjestykket *AB* lig 100 mm afsættes, og vinkel *A* lig 60˚ afsættes. Vinklens venstre ben forlænges til skæring med en cirkel, der har centrum i *B* og radius 94 mm, hvorved skærings-punkterne *C* og *D* fremkommer. Altså er der to løsninger.



Undersøgelse 3

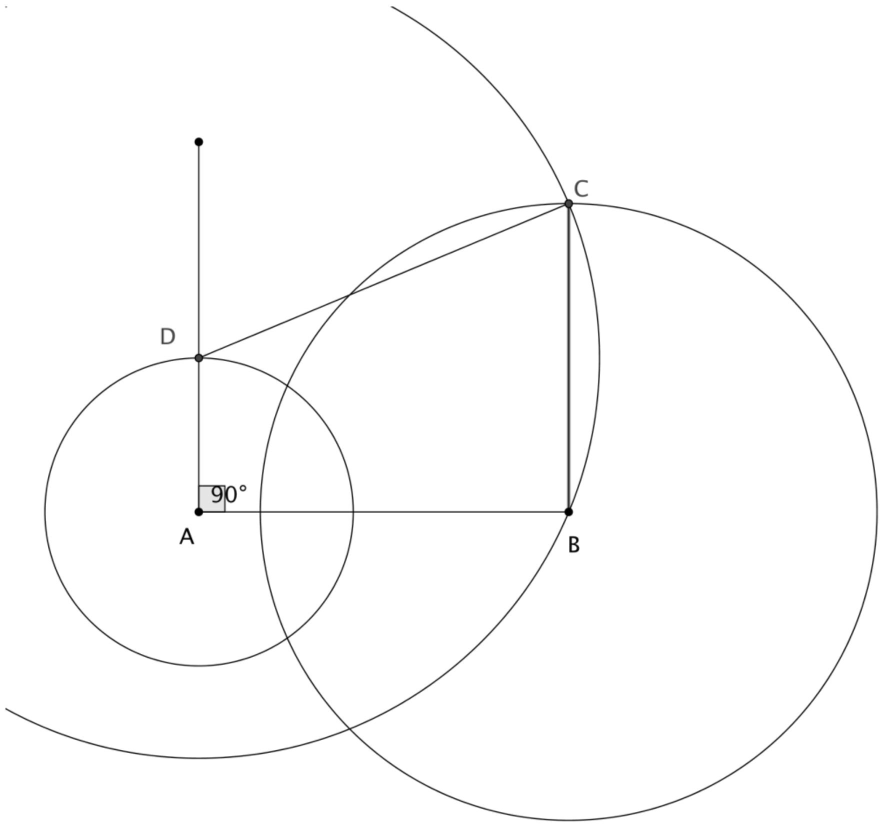
1) Gårdejerne søger et punkt *P* med samme afstand til alle gårdene *A*, *B* og *C*. Da punktet *P* skal have lige stor afstand til *A* og *B*, må det ligge på midtnormalen for *AB* og tilsvarende for de øvrige siders midtnormaler. *P* er derfor skæringspunktet mellem midtnormalerne til linjestykkerne *AB*, *BC* og *AC*. Der er altså kun ét punkt med den søgte egenskab, når man ser strengt geometrisk på det.

Spørgsmålet er imidlertid, om denne løsning er den smarteste. Det kunne være billigere at minimere den samlede rørlængde hen til brønden, altså *AP* + *BP* + *CP*, og dette ville give en anden placering, som man kan eksperimentere sig frem til ved at tegne og måle (eller ved at bruge målefunktionen i et geometrisk tegneprogram) og så flytte *P* rundt, indtil man får den mindste værdi for *AP* + *BP* + *CP*. Det viser sig, at positionen udmærker sig ved, at vinklerne mellem de fra *P* udløbende rør er lige store og altså 120˚.

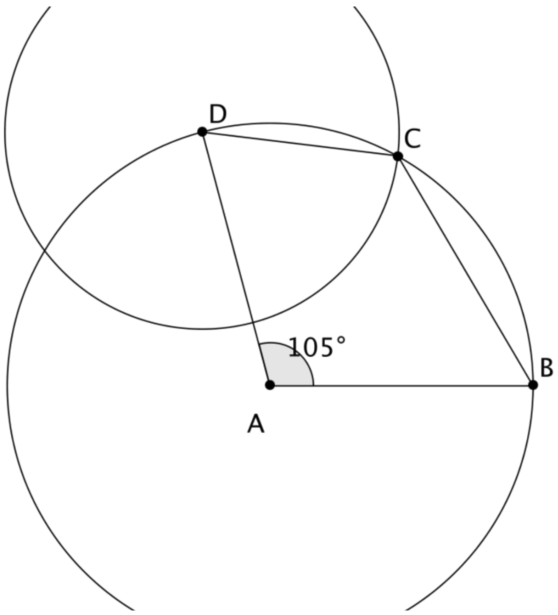
2) Grænserne for den enkeltes arbejdsmark udgøres af midtnormalerne til linjestykkerne *AB*, *BC* og *AC*.

Øvelse 3

Vi afsætter først vinkel *A* med sine to ben, *AB* på 6 og *AD* på 2½. Med hhv. *D* og *B* som centrum tegnes to cirkler med radier hhv. 6½ og 5. Hvor de skærer hinanden findes punktet *C*:



Øvelse 4

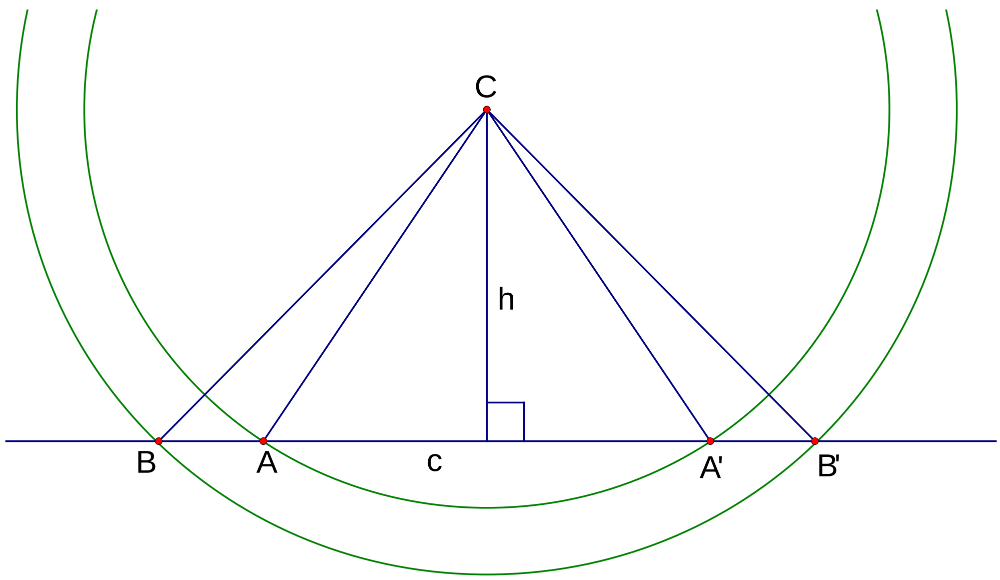


Øvelse 5

1) Linjen *c* tegnes. Punktet *C* afsættes i en afstand på 10 cm fra *c*. Højden h_c afsættes.

Med centrum i *C* og radius 12 cm tegnes en cirkel. Skæringspunkterne med *c* betegnes *A* og *A'*. Tilsvarende tegnes en cirkel med centrum i *C* og radius 14 cm. Skæringspunkterne med *c* betegnes *B* og *B'*.

Der er således fire løsninger: $\triangle ABC,\ \triangle AB'C,\ \triangle A'B'C$ *og* $\triangle A'BC$, de er dog to og to kongruente.

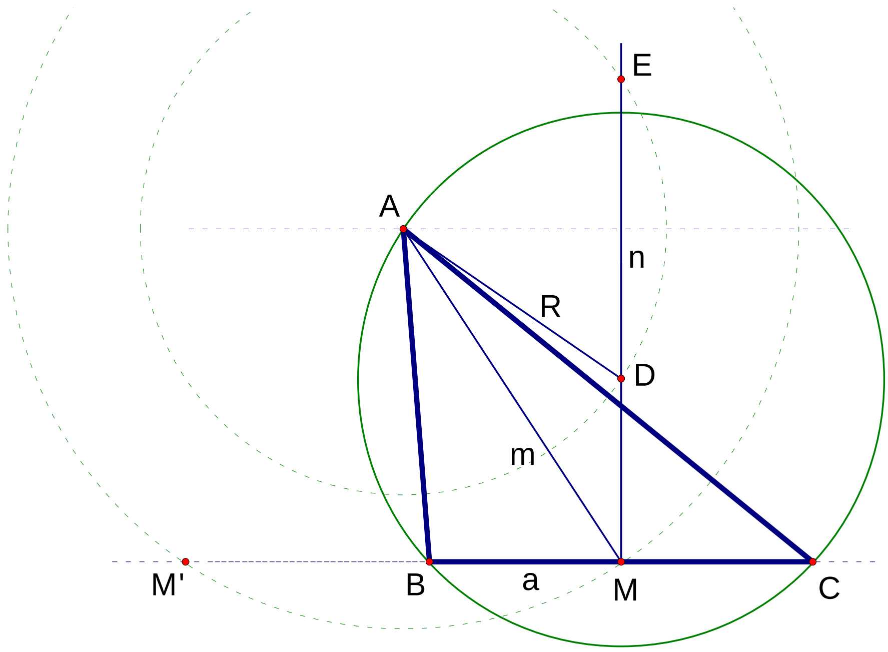


5) Inspireret af at h_a er lig 10 cm tegnes to parallelle linjer med afstand 10 cm, den nederste kaldes *a*. På den øverste vælges et punkt som *A*. Med *A* som centrum og radius 12 cm tegnes en cirkel, denne skærer *a* i to punkter, *M* og *M'*, det giver to løsninger, her viser vi kun den ene. Skæringspunktet *M* udgør midtpunkt på *BC*.

Om *B* og *C* ved vi kun, at de skal ligge på *a*. Men vi ved, at den omskrevne cirkel har midtnormalernes skæringspunkt som centrum, derfor tegnes midtnormalen *n* til *BC*. For at finde centrum for den omskrevne cirkel tegnes en cirkel med centrum i *A* og radius 8 cm. Cirklen skærer *n* i to punkter *D* og *E*, et af disse udgør centrum. *E* kan ikke bruges, da en cirkel med radius 8 cm og centrum i *E* ikke kan nå *a*, hvor *B* og *C* skal ligge, altså er *D* centrum.

Med centrum i *D* og radius 8 cm tegnes en cirkel, hvor denne skærer *a*, har vi *B* og *C*.

Havde vi benyttet *M’* havde vi fået en hermed kongruent trekant.



Kapitel 2 Lokalisering, afstand og bevægelse

Øvelse 4

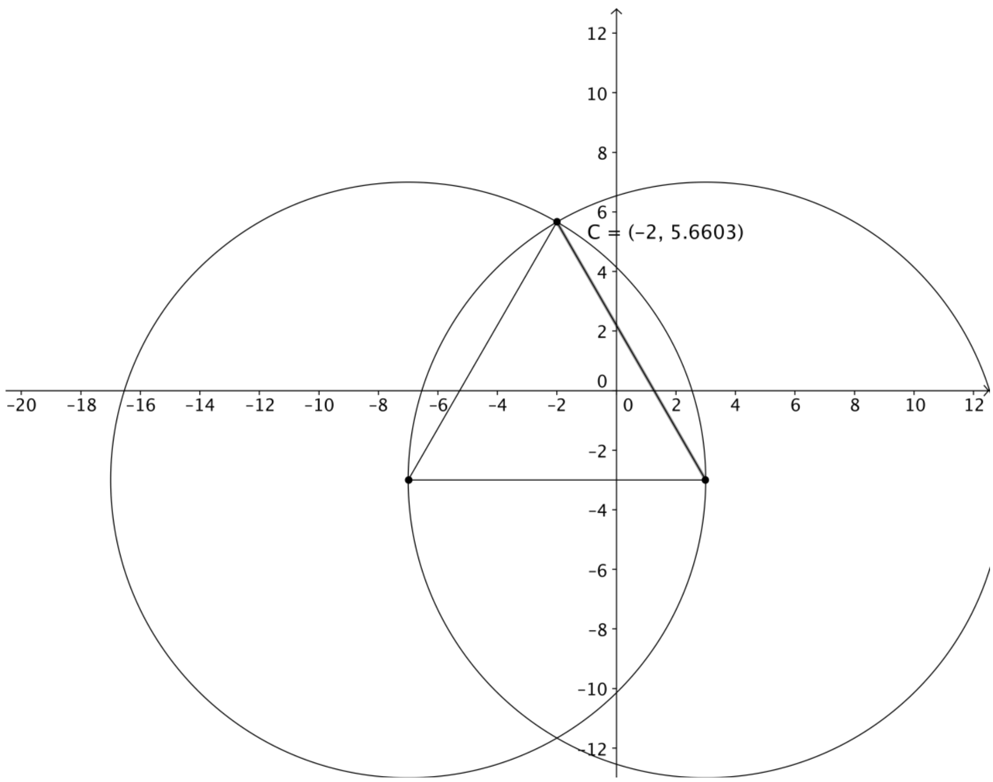
1) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

2) $a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{26^2 + 24^2} = \sqrt{100} = 10$

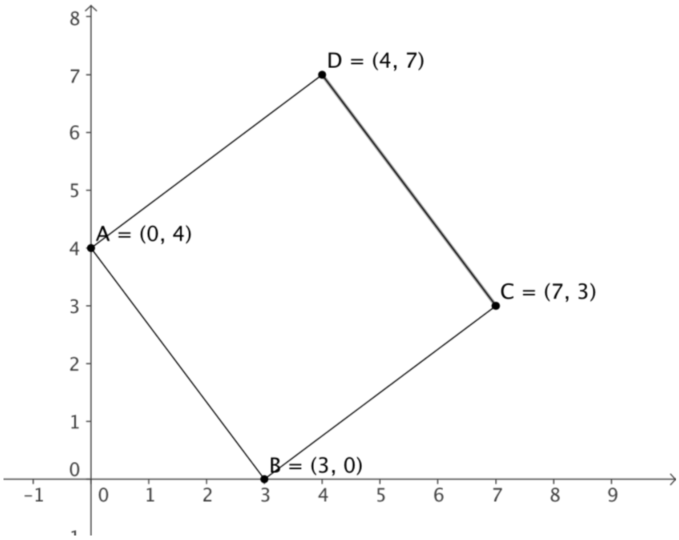
3) og 4) $|AB|$ = 10. Tegn situationen og find en passende retvinklet trekant med kateter 6 og 8.

Øvelse 5

|AC| = |AB| = 3 – (-7) = 10. Højden h i den ligesidede trekant findes ved hjælp af Pythagoras' sætning: $h^2 + 5^2 = 10^2 \Rightarrow h = 5\sqrt{3} = 8,6603$. Så C får de på figuren angivne koordinater.



Øvelse 6



D = (4,7).

Sidelængden = $\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2}=5$.

Diagonallængden = $\sqrt{(4-3)^2+(0-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Øvelse 7

Formlen bliver $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Øvelse 10

For at finde koordinatudtrykket for vektoren $\overrightarrow{AB}$ skal vi ifølge teorien øverst på side 677 parallelforskyde $\overrightarrow{AB}$, så startpunktet for $\overrightarrow{AB}$ falder i (0,0). Dette kan man gøre ved at trække x_1 fra førstekoordinaten og y_1 fra andenkoordinaten i de to punkter $A(x_1,y_1)$ og $B(x_2,y_2)$. Herved får det nye endepunkt B' koordinaterne (x_2-x_1,y_2-y_1). Det betyder, at $\overrightarrow{AB}$ har koordinaterne (x_2-x_1,y_2-y_1).

Øvelse 13

1) Tur A og tur C bringer os hjem igen.

2) Hvis man adderer alle *x*-koordinaterne og får 0 som resultat samt alle *y*-koordinaterne og ligeledes får 0 som resultatet, så fører turen tilbage til udgangspunktet. Det er, fordi vektorer adderes ved at addere *x*-koordinaterne for sig og *y*-koordinaterne for sig. Fx
$(3,6)+(-7,4)=(3+(-7),6+4)=(-4,10)$

Øvelse 14

Efter 20 minutter er han nået $\frac{1}{3}$ ud af vektoren (3,4), dvs. nået ud til begyndelsespunktet plus $\frac{1}{3}$ af vektoren (3,4): $\left(\frac{1}{3}\cdot 3, \frac{1}{3}\cdot 4\right) = \left(1, \frac{4}{3}\right)$, altså til $(-5,-2) + \left(1, \frac{4}{3}\right) = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$.

Efter en halv time er han kommet til begyndelsespunktet plus det halve af vektoren (3,4): $\left(\frac{1}{2}\cdot 3, \frac{1}{2}\cdot 4\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, altså til $(-5,-2) + \left(\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

Efter to timer er han kommet dobbelt så langt, altså begyndelsespunktet plus 2 gange vektoren (3,4): $(2\cdot 3, 2\cdot 4) = (6,8)$, altså til $(-5,-2) + (6,8) = (1,6)$

Generelt kan vi se, at til tiden *t* er han nået til begyndelsespunktet plus vektoren (3*t*, 4*t*), således at svar nr. 2 er det korrekte.

Øvelse 15

En behagelighed ved denne tur er at Ali kommer hjem igen, idet
$P(0) = (-5+0, -2-0) = (4-9, 10-12) = P(3)$.

Skal man afgøre, om han på noget tidspunkt går hurtigere end 5 km i timen, skal man se på koefficienterne til *t* på de to koordinater. I intervallet [1,2[ser vi, at der står hhv. –*t* og 5*t*, hvilket betyder, at han på en time bevæger sig 1 km (tilbage) i *x*-aksens retning og 5 km opad i *y*-aksens retning, hvilket klart sammenlagt giver mere end 5 km – dog ikke 6, idet han jo bevæger sig direkte og ruten beregnes ved Pythagoras' sætning til $\sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26} > 5\,\text{km/t}$

Kapitel 3 Undersøgelser af rumlige figurer

Her er ingen forslag til besvarelser, da øvelserne i den grad er en opfordring til selv at undersøge.

Kapitel 4 Bevisførelse i geometri

Øvelse 1

En mulig udlægning er, at den direkte vej, linjestykket, mellem to punkter aldrig er længere end summen af de to afstande man får ved at "gå" via et tredje punkt.

Øvelse 2

1) Vi antager, at *l* er parallel med *m*, og *m* er parallel med *n*. Vi skal vise, at *l* er parallel med *n*. Det gør vi med et indirekte bevis.

Vi antager, at *l* skærer *n* i et punkt *P*. Gennem punktet *P* har vi nu ifølge det forudsatte to linjer, der er parallelle med *m*, men ifølge aksiom 3 kan der igennem punktet *P* kun trækkes en linje parallel med *m*. Altså er *l* lig med *n*. Vi har hermed vist, at enten er *l* parallel med *n* eller også er *l* lig med *n*, og så er de også parallelle (definition 3).

2) Det er ikke noget bevis inden for den Euklidiske ramme, fordi det ikke bygger på definitioner, aksiomer og sætninger, vi allerede har vist, men derimod bygger på noget, vi af anden vej ved om parallelle linjer.

Øvelse 3

Formlen kan findes ved at dele *n*-kanten op i $(n-2)$ trekanter. Man får vinkelsummen $(n-2)\cdot 180°$

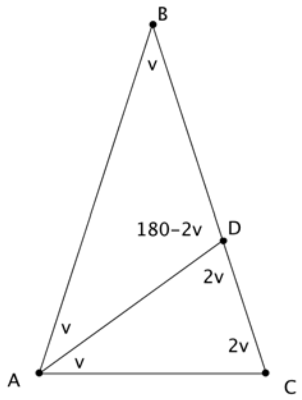
Øvelse 4

1) $\angle C$ og nabovinklen *z* udgør tilsammen to rette Vi ved også, at $\angle A + \angle B + \angle C$ også er to rette. Vi har altså i kort notation: $z + C = A + B + C$. Ifølge den 3. almene lov må vi gerne trække det samme fra på hver side, og vi ender med $z = A + B$, hvilket skulle bevises.

2) Det er ikke nok oplysninger til at bestemme alle tre vinkler.

3) Oplysningerne giver tre ligninger: B + C = 100; A + C = 150 og A + B = 90. Løses disse ligninger fås A = 70, B = 20 og C = 80. Men det kan ikke lade sig gøre. Den samlede vinkelsum bliver kun 170. Trekanten eksisterer altså ikke.

Øvelse 6



Trekant ADE er ligebenet, så vinklerne kan bestemmes ud fra *v*.

Trekant ADC er også ligebenet, så vinklerne kan også udtrykkes ved *v*.

I alt bliver $5v = 180$, $v = 36°$, og det tre vinkler i trekanten er 72°, 36 og 72°.

Øvelse 7

Den omvendte sætning må hedde: Hvis en trekant ABC har $\angle A = \angle B$, så er trekanten ligebenet, altså $AC = CB$.

Bevis (tegn selv):
Vi tegner vinkelhalveringslinjen *CM* i trekanten, de to trekanter *CAM* og *CMB* er kongruente, fordi de har to vinkler og dermed også den tredje vinkel parvis lige store, og de har *CM* fælles. Altså er $AC = CB$, hvilket skulle vises.

Alternativ:
Hvis man ikke er helt fortrolig med at bruge kongruenssætninger, kan man klare sig med et spejlingsargument, hvor man spejler trekanten i midtnormalen til *AB*. Men her har man i første omfang det problem, at man ikke kan vide, om midtnormalen går gennem *C*. Det kan man dog ret hurtigt argumentere for.

Øvelse 10

Der ligger en dobbeltpåstand i sætningen, som ofte overses:

1) Hvis et punkt *P* ligger på midtnormalen, så er $|PA| = |PB|$, og

2) Hvis et punkt *P* har egenskaben $|PA| = |PB|$, så ligger *P* på midtnormalen.
For at kunne komme i gang med beviserne for disse to påstande, må vi lige repetere, at midtnormalen for *AB* pr definition er den vinkelrette på midtpunktet for linjestykket *AB*. For at understrege at beviser bygger på ræsonnementer, præsenterer vi beviset uden tegninger, men opfordrer læseren til selv at få støtte fra tegninger, hvis det bliver nødvendigt for at følge tankegangen.

Bevis for 1) Vi viser at hvis et punkt P ligger på midtnormalen, så er $|PA| = |PB|$. Vi tegner først stykket AB, midtpunktet M og lader linjen m være vinkelret på AB i punktet M, og dermed er m altså midtnormal til AB. Vi lader P være et punkt på m og tegner PA og PB, så der opstår to trekanter PMA og PMB. Disse to trekanter er kongruente ifølge K3, idet $|MA| = |MB|$, $|PM| = |PM|$, og den mellemliggende vinkel ved M i begge trekanter er ret. Derfor er også $|PA| = |PB|$.

Bevis for 2) Vi vil altså vise, at hvis et punkt P har egenskaben $|PA| = |PB|$, så ligger P på midtnormalen.

Lad os tegne AB og punktet P samt linjestykkerne PA og PB. I udgangspunktet ved vi blot, at $|PA| = |PB|$, men ved anvendelse af sætning 3 ved vi også, at vinklerne ved grundlinjen i denne ligebenede trekant er lige store. Vi nedfælder nu den vinkelrette fra P på linjestykket AB – lad os sige den ender i punktet N. Så er trekant PNA kongruent med trekant PNB.

For hver af trekanterne har en ret vinkel, og vi har netop set, at de har 'vinklerne ved grundlinjen' lige store. Det lægger op til, at vi kan bruge K2, hvis vi bare kan finde en side, som er lige stor i de to trekanter. Men her vil PM være et indlysende valg, da denne side er fælles for de to trekanter. Så de er kongruente, og dermed gælder også, at $|NA| = |NB|$, så N er midtpunkt, hvilket sammenholdt med de rette vinkler betyder, at linjen gennem N og P er midtnormal. P ligger altså på midtnormalen.

Øvelse 11

Vi fortsætter øvelsen i at lave beviser uden tegninger. Men vi forestiller os trekant ABC tegnet og ligeledes to af midtnormalerne n og m for hhv. AB og BC. Lad P være skæringspunktet for n og m.

Da P ligger på n, gælder ifølge sætning 4, at $|PA| = |PB|$. Men P ligger også på m, hvilket på samme måde betyder, at $|PB| = |PC|$.

Kombineres de to ligheder fås $|PA| = |PC|$, hvilket betyder, at P ligger på midtnormalen til AC. P er altså det fælles skæringspunkt for alle tre midtnormaler. Ved at kombinere lighederne ses, at $|PA| = |PB| = |PC|$. Kaldes denne størrelse for r, ses at en cirkel med centrum i P og radius r vil gå lige akkurat gennem alle trekantens hjørner.

Øvelse 12

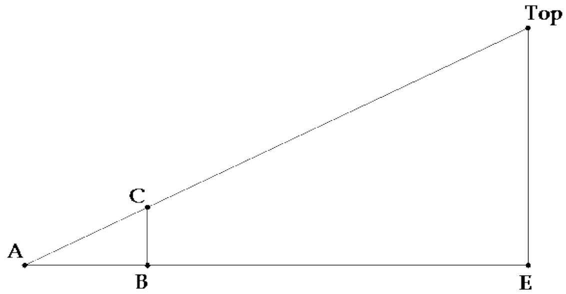
I udgangspunktet har vi et parallelogram, altså en firkant $ABCD$ med modstående sider parallelle, og vi vil bevise, at de modstående sider også er lige store. Fordi trekanter er det eneste, vi faktisk ved noget om i den teori, vi har opbygget, tegnes diagonalen AC, der giver os to trekanter ABC og ADC at ræsonnere ud fra. Da vi har en del parallelle linjer giver aksiom 4 (om at ensliggende vinkler ved sådanne er lige store) os nogle lige store vinkler: $BCA = CAD$ og $CAB = ACD$. Da endvidere siden AC er fælles for de to trekanter, kan vi ved hjælp af K2 konkludere, at de to trekanter er kongruente. Det betyder specielt, at de øvrige sider også er parvis lige store. $|AB| = |CD|$ og $|BC| = |AD|$, hvilket skulle vises.

Kapitel 5 Elementer af geometriens didaktik

Ingen løsningsforslag

Kapitel 6 Klassisk geometri

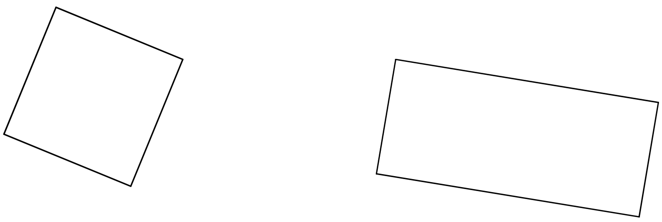
Øvelse 1



Træets højde over øjenhøjde kan bestemmes ud fra brøkerne:

$\frac{BC}{AB} = \frac{E\ \text{Top}}{AE}$. Den eneste af disse afstande, der ikke umiddelbart kan måles er $|E\text{Top}|$, hvorfor det er muligt at bestemme træets højde.

Øvelse 2



Disse to firkanter har vinkler, der er parvis lige store, men den ene er bestemt ikke blot en forstørrelse af den anden.

Øvelse 3

areal af *CAM* = areal af *BAN*

areal af *ABC* = areal af *ABC*

Heraf følger, at forholdet mellem størrelserne på venstre side er lig med forholdet på højre side:

$$\frac{\text{areal af } ABC}{\text{areal af } CAM} = \frac{\text{areal af } ABC}{\text{areal af } BAN}.$$

Benyttes arealformlen, fås heraf $\frac{\frac{1}{2}\cdot h_1 \cdot |AB|}{\frac{1}{2}\cdot h_1 \cdot |AM|} = \frac{\frac{1}{2}\cdot h_2 \cdot |AC|}{\frac{1}{2}\cdot h_2 \cdot |AN|}$, hvor h_2 er højden på siden *AB* i trekant *ABC*, og h_1 er højden på siden *AC* i trekant *ABC*.

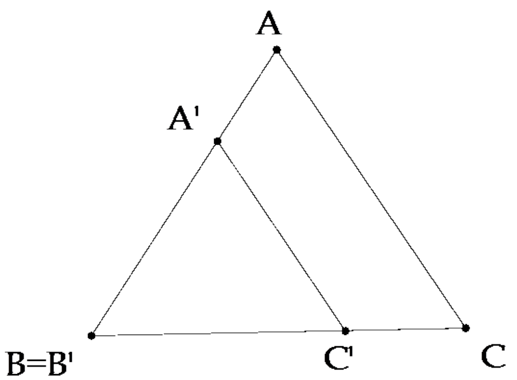
Ved forkortning får vi $\frac{|AB|}{|AM|} = \frac{|AC|}{|AN|}$, og ved at vende brøken fås set ønskede resultat.

Øvelse 4

Antagelsen vil give, at vinkelsummen i trekanten er over 180°, da vinklerne ved *B* og *B'* i den tænkte trekant, tilsammen allerede er 180°.

Øvelse 5

Læg i stedet trekanten så *B* og *B'* bliver sammenfaldende.



Ved at argumentere som før, har man $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. I fremstillingen i bogen, får man $\frac{c'}{c} = \frac{b'}{b}$, og derfor gælder $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$.

Øvelse 6

$\frac{\text{højde}}{48} = \frac{3}{8}$ så højden bestemmes til 18 m, hvilket er lig længden af den skygge, som den anden gruppe måler.

Øvelse 7

$$\frac{|A'B'|}{|B'C'|} = \frac{|AB|}{|BC|}$$

$$\frac{900}{19-1,4} = \frac{15.900}{|BC|}$$

$$|BC| = \frac{15.900}{900} \cdot 17,6 = 310,93$$

Bjergets højde er derfor 310,93 + 19 = 329,93.

Øvelse 8

$$\frac{5}{127} = \frac{h-5}{d+1.000} \text{ eller } \frac{d+1.000}{127} = \frac{h-5}{5}$$

$$\frac{5}{123} = \frac{h-5}{d} \text{ eller } \frac{d}{123} = \frac{h-5}{5}$$

Heraf fås

$$\frac{d+1.000}{127} = \frac{d}{123}$$

$$123d - 123.000 = 127d$$

$$4d = 123.000$$

$$d = 30.750$$

h bestemmes nu ved

$$\frac{d}{123} = \frac{h-5}{5}$$

$$\frac{30.750}{123} = \frac{h-5}{5}$$

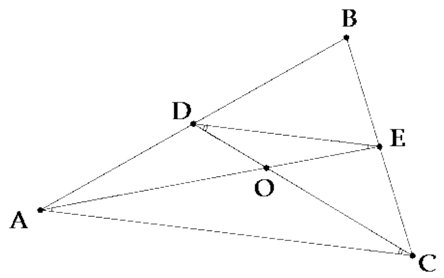
$$h = \frac{30.750}{123} \cdot 5 + 5 = 1.255$$

Øvelse 9

Da det omtalte linjestykke deler siderne på midten, er forholdene i opdelingen 1:1 på begge sider.

Den omvendte sætning til Thales sætning giver derfor, at linjen er parallel med trekantens tredje side.

Øvelse 10



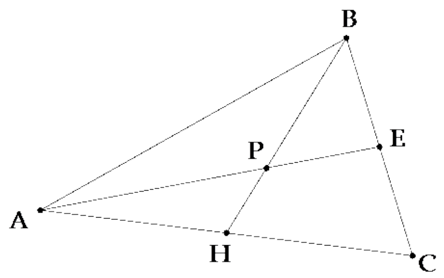
De to trekanter *AOC* og *EOD* er ensvinklede.

Specielt gælder $\frac{|DO|}{|CO|} = \frac{|EO|}{|AO|} = \frac{|DE|}{|AC|}$

Da *D* og *E* ligger på midtpunkterne af siderne giver Thales sætning specielt at $\frac{|DE|}{|AC|} = \frac{1}{2}$.

Sammenholdt med udregningen ovenfor, har vi $\frac{|DO|}{|CO|} = \frac{|EO|}{|AO|} = \frac{1}{2}$, altså deler *O* de to medianer i forholdet 1:2.

Betragt nu et andet par af medianer



Som ovenfor kan vi argumentere for $\frac{|HP|}{|BP|} = \frac{|EP|}{|AP|} = \frac{1}{2}$.

Specielt ser vi, at både *O* og *P* er punkter, der deler *AE* i forholdet 2:1. Punkterne *O* og *P* må derfor være ens, og der gælder, at de tre medianer skærer hinanden i ét punkt.

Øvelse 11

Ved konstruktionen i bogen, bliver højderne omdannet til midtnormaler i en større trekant. Da vi allerede ved at midtnormalerne i en trekant skærer hinanden i ét punkt, må højderne derfor også have denne egenskab.

Kapitel 7 Måling og Areal

Øvelse 6

1) Vi har et kvadrat med areal 257 m^2. Fra sætning 5 (der siger, at forstørres alle sidelængder i en polygon med en faktor *f*, så bliver arealet f^2 gang så stort) har vi, at hvis omkredsen fordobles, så bliver arealet 2^2 gang så stort, altså $4 \cdot 257$ m^2 = 1028 m^2.

2) Hvis sportspladsen er blevet forstørret med samme faktor på længde og bredde, kan vi tillade os at anvende sætning 5. Da arealet er blevet firdoblet og da $4 = 2^2$, må der være tale om en lineær forstørrelse med en faktor 2. Omkredsen er således blevet 1800 meter.

Men her er virkelig tale om et skøn, fordi vi ikke ved noget om, hvordan sportspladsen er blevet større. Hvis man nysgerrigt følger dette spor, så skifter opgaven karakter af en øvelse til en undersøgelse. Undersøgelsen vil vise, at hvis sportspladsen af en eller anden mærkelig grund fra starten var meget lang og smal, så ville omkredsens vækst afhænge meget af om den nye sportsplads blev lavet ved at lægge fire af de gamle i forlængelse af hinanden eller ved siden af hinanden langs de lange sider. Teoretisk set kan man herved, på den ene side få at omkredsen kun vokser ganske lidt, og på den anden at den vokser med en faktor tæt på fire ligesom arealet.

3) Hvis sidelængderne i rektanglet vælges til hhv. 99,9 m og 0,1 m bliver arealet = $(99{,}9 \cdot 0{,}1)$ m^2 = 9,99 m^2, altså kan arealet blive mindre end 10 m^2.

Det største areal, som et rektangel med en omkreds på 200 m kan få, er, når rektanglet har form som et kvadrat med sidelængden 50 m, hvor arealet = $(50 \cdot 50)$ m^2 = 2500 m^2, altså kan arealet ikke bliver større end 5000 m^2.

4) Dette er et spørgsmål, der har optaget matematikerne siden den græske oldtid, og problemet har navn efter et gammelt sagn: Didos problem, men kaldes også det isoperimetriske problem. Det drejer sig om, hvor meget areal man kan omslutte med en lukket snor med given længde.

Det er nemt nok at se, at arealet kan blive meget lille, hvis man trækker snoren ud til en dobbelt linje. Så det udfordrende problem i denne forbindelse er, at få arealet så stort som muligt. Vi har ovenfor nævnt, at hvis formen skal være rektangulær, så har kvadratet den optimale form.

Men hvad nu hvis det skal være en trekant, en femkant, eller hvis der slet ikke er krav til formen. En ledetråd i problemets udvikling har været, at det ser ud til, at arealet bliver større jo mere symmetri, der er i figuren.

Vi vil ikke ødelægge den fornøjelse, der er i at prøve kræfter med noget, det har taget menneskeheden omkring 2000 år at få rede på, men vil give et kort svar på spørgsmålet i opgaven:

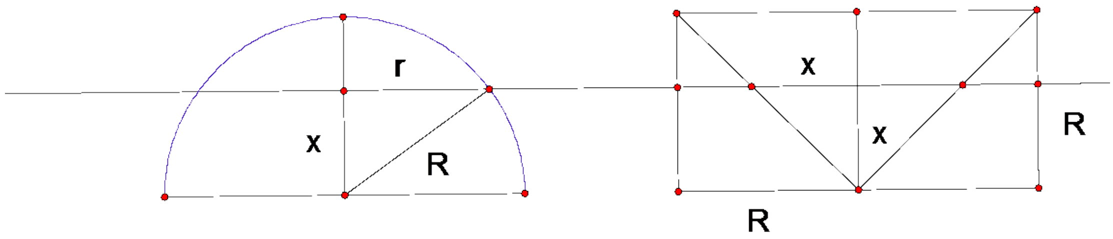
Svar: Ja, der er den sammenhæng, at en figur med omkreds L har et areal A, der tilfredsstiller uligheden: $0 \le A \le \frac{L^2}{4\pi}$. Men arealet kan antage alle værdier derimellem.

Øvelse 8

Hvis man tegner en skitse af situationen bliver det klart, at du, som løber i et spor, kommer til at løbe ad en længere bane end din makker i sporet lige ved siden af dig, altså et spor længere inde. På langsiderne løber I lige langt, men du kommer alt i alt til at løbe i en cirkel med 1,2 meter større radius, hvilket giver en tur, der er $2\pi r = 2\pi \cdot 1,2 = 7,54$ meter, hvorfor din startstreg bør være 7,54 meter længere fremme end hos din makker i sidesporet.

Kapitel 8 Rumfang

Øvelse 6



$r=\sqrt{R^2-x^2}$ arealet af tværsnitscirklen i højden x er derfor $\pi r^2=\pi\cdot(R^2-x^2)$.

I cylinderen er der et tværsnitsareal mellem keglen og cylinderen på $\pi\cdot R^2-\pi\cdot x^2=\pi\cdot(R^2-x^2)$.

Den halve kugles rumfang og rumfanget af cylinderen fratrukket keglen er derfor ens.

Cylinder – kegle = $\pi\cdot R^2\cdot R-\frac{1}{3}R\cdot\pi\cdot R^2=\frac{2}{3}\pi\cdot R^3$

Kuglens rumfang er derfor $2\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot R^3$.

Opsamling på kapitel 8

2a) Lastbilen har et lovligt rumfang på 12,375 kubikmeter, mens rumfanget af siloen er $15\cdot\pi\cdot 3^2=424{,}115$ kubikmeter. Måler vi, hvor mange gange lastbilens rumfang går op i siloens rumfang, finder vi, at der er behov for 34,27 ture med lastbilen, hvor man så må runde op eller ned, alt efter hvor lovlig og sikkerhedsbevidst man er.

2b) Det samlede rumfang der transporteres bort med de 55 vogne, er $55\cdot(\frac{1}{2}\cdot(0{,}7+1{,}4)\cdot 1\cdot 3)=173{,}25$ kubikmeter eller 40,8% af siloens rumfang, hvorfor denne også må falde ca. 40,8 % i kornhøjde, altså 6 meter og 12 centimeter.

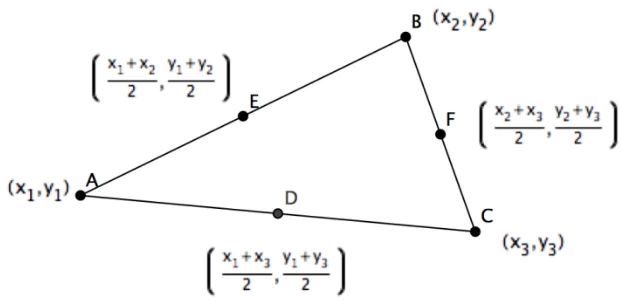
2c) Oplysningen om kegler er utilstrækkelig, men det er diameteren af grundfladen, der er 12 meter. Hvis vi kalder den ukendte højde for h, fås rumfanget af kornkeglen til $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot 6^2=37{,}7h$. Hvis det skal være lig med den fulde silos rumfang på 424,115, finder vi $h=11{,}25$ meter.

Kapitel 9 Analytisk geometri

Øvelse 1

Skiftet fra notationen $|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$ til $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ er tilladt fordi både positive og negative tal bliver til noget positivt når de kvadreres.

Øvelse 2



Vi vil beregne den ene afstand ved hjælp af afstandsformlen

$$|EF|^2 = \left(\frac{x_2 + x_3 - (x_1 + x_2)}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 + y_3 - (y_1 + y_2)}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_3 - y_1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4}(x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{4}(y_3 - y_1)^2$$

$$\frac{1}{4}\left[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]$$

Dvs.

$$|EF| = \sqrt{\frac{1}{4}\left[(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2\right]} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \frac{1}{2}|AC|$$

altså halvdelen af den tilsvarende side i trekanten

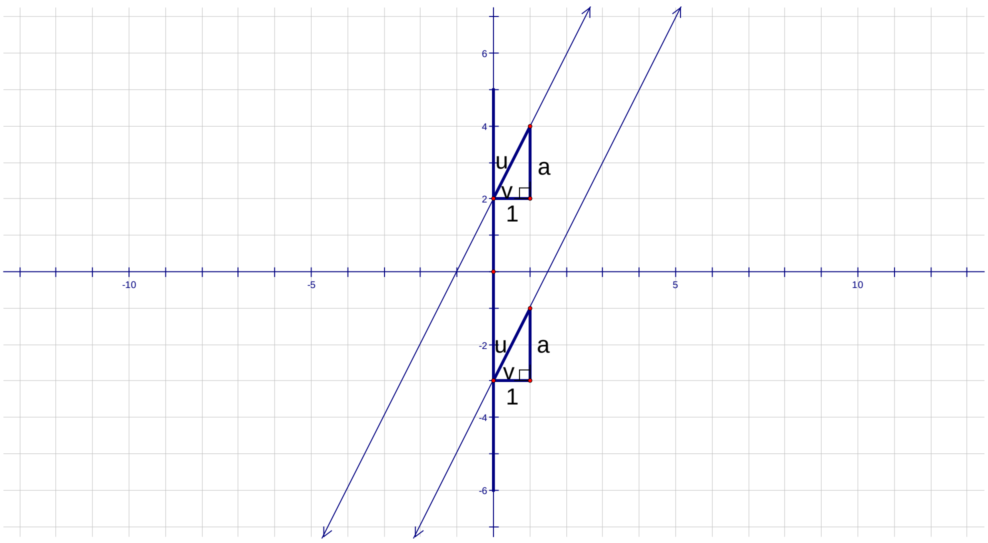
Øvelse 3

Linjen gennem
(–1,1) og (3,4): $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$
(–1,–3) og (4,1): $y = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$
(–5,–5) og (11,–5): $y = -5$
(–2,–3) og (–11,–9): $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
(1,7) og (1,22): $x = 1$

Øvelse 5

Da det netop er linjernes hældningskoefficienter, der er afgørende for linjernes ‘retning’, vil egenskaberne parallelitet og ‘samme stigningstal’ være ækvivalente for to linjer.

Et detaljeret argument for, at to linjer med samme hældningskoefficient er parallelle kan tage udgangspunkt i nedenstående tegning af situationen. Når hældningskoefficienterne er ens, kan vi kalde dem for *a*, hvorved vi ser, at de to trekanter, der illustrerer betydningen af *a*, bliver kongruente, da to sider og deres mellemliggende rette vinkel er parvis lige store.



Hermed bliver de to vinkler markeret som *v* også lige store og dermed de to vinkler markeret som *u*. Oversat til klassisk geometri har vi to linjer, der skærer en tredje (*y*-aksen) så de ensliggende vinkler er lige store. De to linjer er da parallelle, for hvis de skar hinanden ville der fremkomme en trekant med vinkelsum større end 180 grader.

Øvelse 7

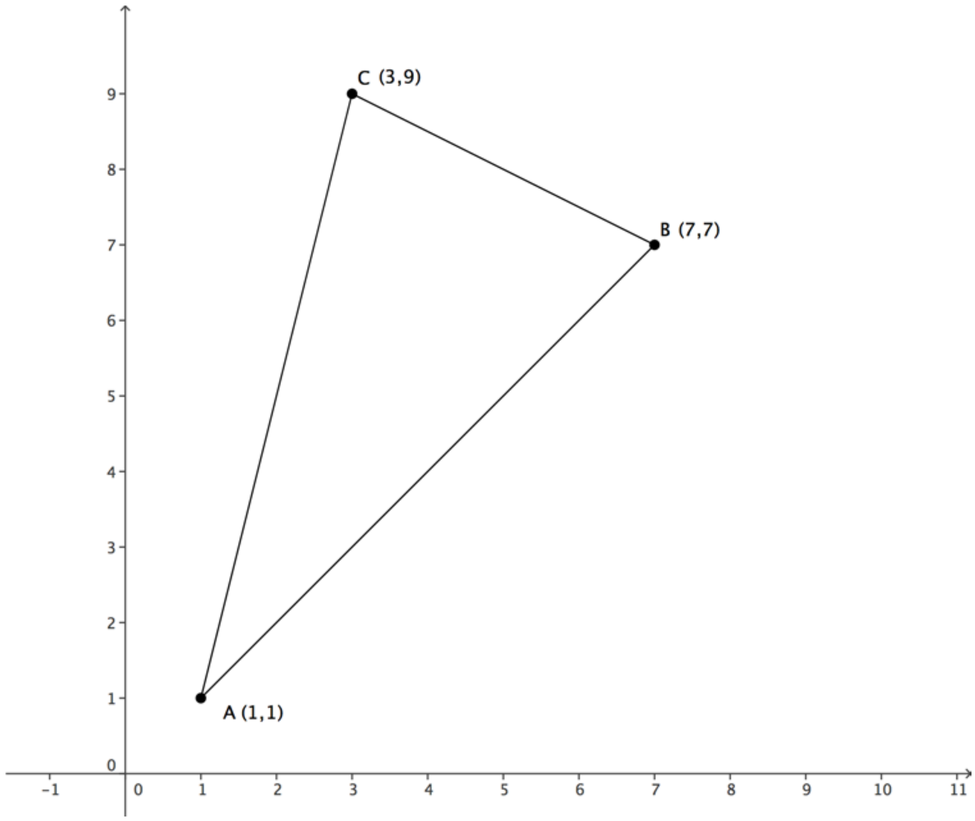
Hvis en linje er parallel med *y*-aksen giver det ikke mening at tale om dens hældning. Reglen bryder derfor sammen i tilfældet, hvor linjerne er parallelle med akserne.

Øvelse 8

1) Linjen skal have hældning $-\frac{1}{2}$ eftersom $-\frac{1}{2}\cdot 2=-1.$ Ligningen er derfor $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

2) Linjen hedder $x = 3$.

Øvelse 9



Linjestykket *AC* har hældning 4, så midtnormalen på siden *AC* har hældning $-\frac{1}{4}$, da $-\frac{1}{4}\cdot 4=-1$.
Højden på *AC* skal gå gennem *B* (7,7).
Ligningen for højden til *AC* er derfor $y=-\frac{1}{4}x+\frac{35}{4}$.

Linjestykket *BC* har hældning $-\frac{1}{2}$, så midtnormalen på siden *AC* har hældning 2, da $-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$.
Højden på *BC* skal gå gennem *A* (1,1).
Ligningen for højden til *BC* er derfor $y=2x-1$.

Linjestykket *AB* har hældning 1, så midtnormalen på siden *AB* har hældning-1, da $1\cdot(-1)=-1$.

Højden på *AB* skal gå gennem *C* (3,9).
Ligningen for højden til *AB* er derfor $y = -x + 12$.

Vi beregner skæringen mellem to af højderne, og overlader de to andre udregninger til læseren.
Skæring mellem $y = -\frac{1}{4}x + \frac{35}{4}$ og $y = 2x - 1$:

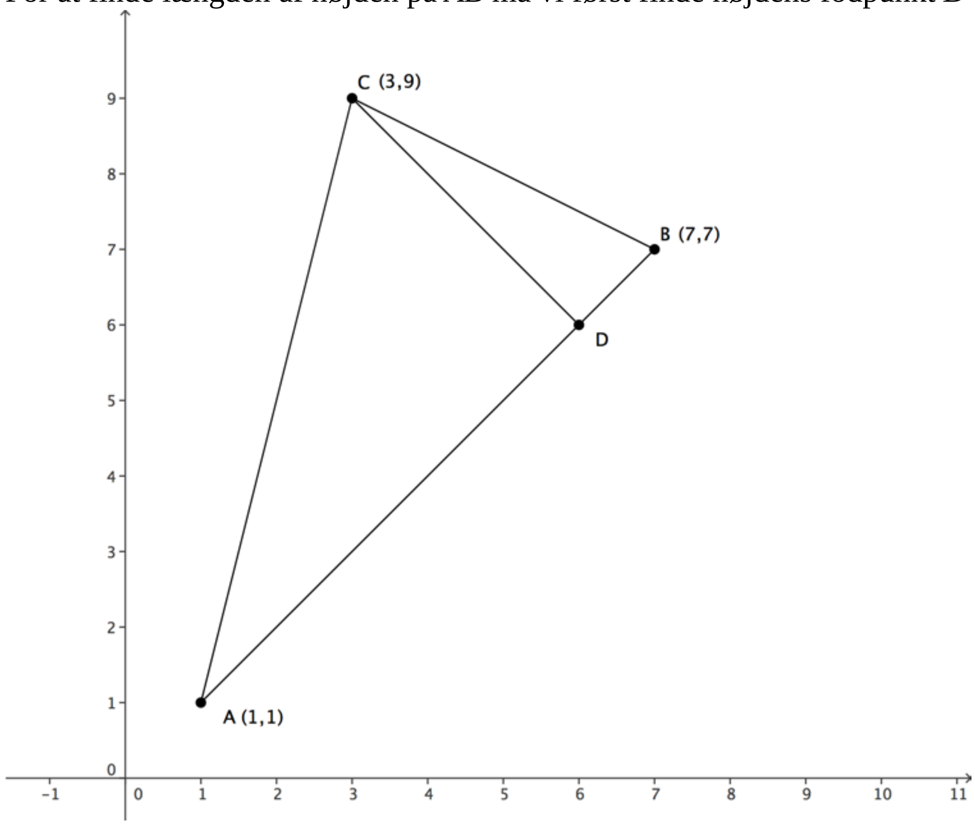
$-\frac{1}{4}x + \frac{35}{4} = 2x - 1$

$\frac{39}{4} = \frac{9}{4}x$

$\frac{13}{3} = x$

$y = 2 \cdot \frac{13}{3} - 1 = \frac{23}{3}$

For at finde længden af højden på *AB* må vi først finde højdens fodpunkt *D*



Det findes som skæring mellem linjen *AB* (som har ligningen $y = x$) og højden $y = -x + 12$.
Skæringspunktet er i (6,6).

Højdens længde bestemmes nu som afstanden mellem *D* og *C* og er
$\sqrt{(6-3)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

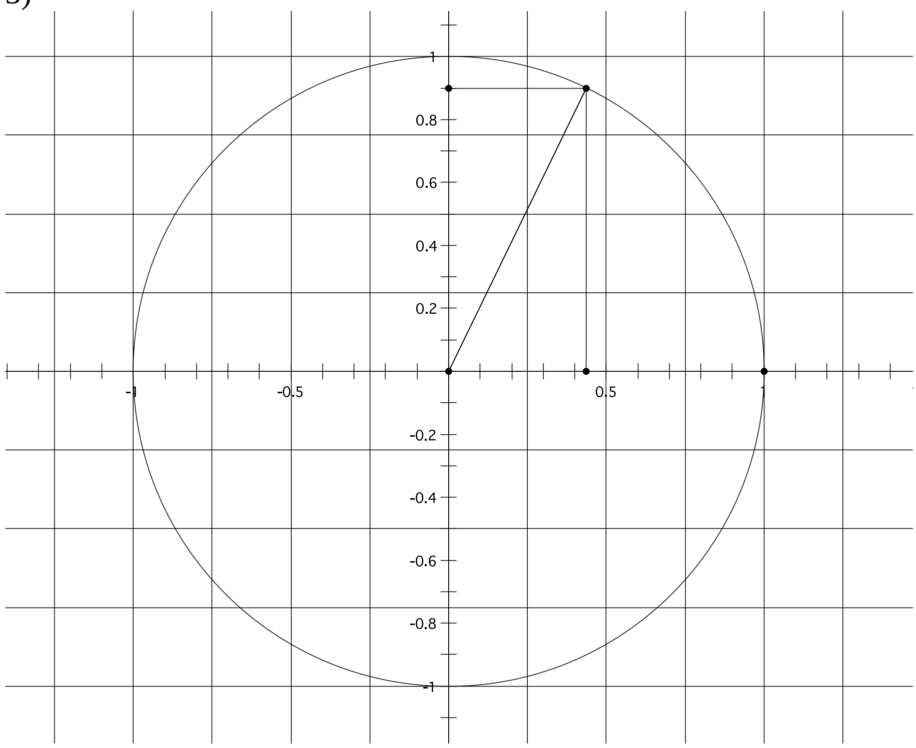
Den tilsvarende grundlinje i trekanten er *AB* som har længde $\sqrt{(7-1)^2 + (7-1)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.
Arealet af trekanten er dermed $\frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 \cdot 2 = 18$.

Kapitel 10 Trigonometri og geometri i det fri

Øvelse 1

2)
$\cos(0^\circ)=1;\ \ \sin(0^\circ)=0;\ \ \cos(90^\circ)=0;\ \ \sin(90^\circ)=1$
$\cos(180^\circ)=-1;\ \ \sin(270^\circ)=-1;\ \ \sin(720^\circ)=0$

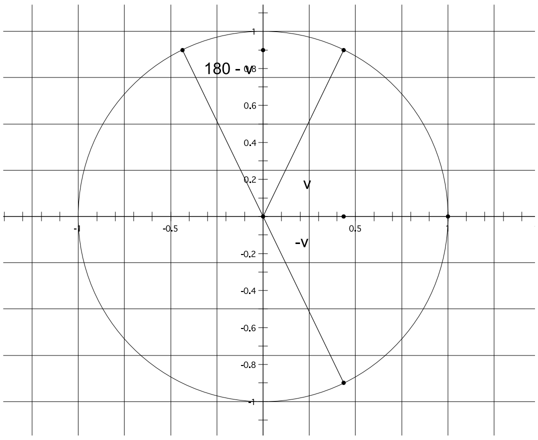
3)



De numeriske værdier af $\cos(v)$ og $\sin(v)$ er kateter i en retvinklet trekant, hvor hypotenusen er 1, og der gælder derfor altid $\left(\cos(v)\right)^2+\left(\sin(v)\right)^2=1$.

Denne omhyggelige skrivemåde sløser man ofte med, idet man både skriver $\cos(v)^2+\sin(v)^2=1$ og $\cos^2(v)+\sin^2(v)=1$, når der ikke er tvivl om, hvad man mener. Bemærk, at formlen $\left(\cos(v)\right)^2+\left(\sin(v)\right)^2=1$ kun tillader os at beregne fx den numeriske værdi af $\sin(v)$ når $\cos(v)$ er kendt. Eventuelle fortegn bliver vi nødt til at tage stilling til ved hjælp af vinklens placering i enhedscirklen.

4)



En spejling af vinklen i *y*-aksen ændrer ikke ved sinus, derfor gælder $\sin(v) = \sin(180 - v)$.

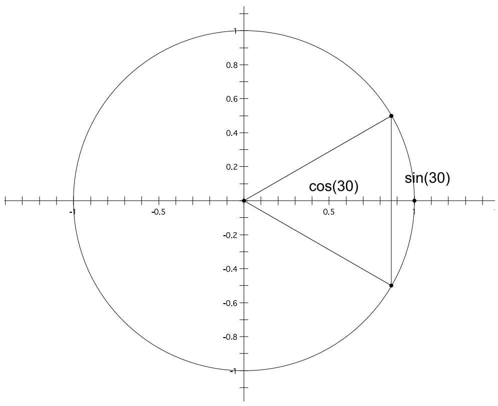
Spejlingen af vinklen i *y*-aksen får cosinus til at skifte fortegn, derfor gælder

$\cos(v) = -\cos(180 - v)$.

En spejling af vinklen i *x*-aksen ændrer ikke ved cosinus, derfor gælder $\cos(v) = \cos(-v)$.

En spejling af vinklen i *x*-aksen får sinus til at skifte fortegn,, derfor gælder $\sin(v) = -\sin(-v)$.

5)



Af figuren ses det, at $\sin(30) = \frac{1}{2}$, nemlig lig med den halve side í den ligesidede trekant.

Af $\left(\cos(30)\right)^2 + \left(\sin(30)\right)^2 = 1$ beregner vi så

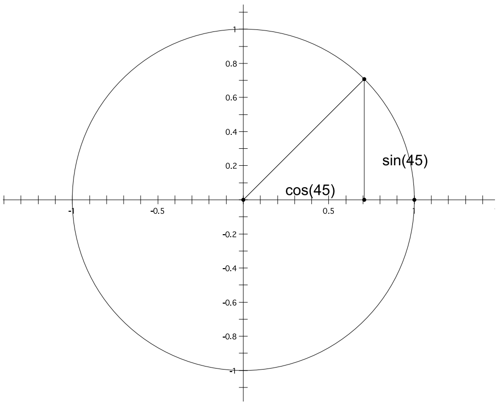
$$\left(\cos(30)\right)^2 = 1 - \left(\sin(30)\right)^2$$

$$\left(\cos(30)\right)^2 = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

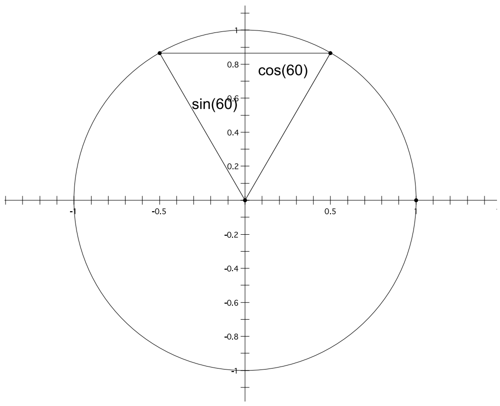
$$\cos(30) = \sqrt{\tfrac{3}{4}} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(30) = \frac{\sin(30)}{\cos(30)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Af figuren ses at $\sin(45)=\cos(45)$. Ved hjælp af Pythagoras' sætning kan vi så beregne



$$\left(\cos(45)\right)^2+\left(\sin(45)\right)^2=1$$
$$\left(\cos(45)\right)^2+\left(\cos(45)\right)^2=1$$
$$2\left(\cos(45)\right)^2=1$$
$$\cos(45)=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\sin(45)$$



$$\tan(45)=\frac{\sin(45)}{\cos(45)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\frac{1}{2}}}=1$$

60º er en spejlvending af situationen med 30º.

$\cos(60)=\frac{1}{2}$ og $\sin(60)=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\tan(60)=\frac{\sin(60)}{\cos(60)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

90º følger direkte af definitionen.
$\tan(90)$ er udefineret.

120º = 180º – 60º, så ved betragtningerne fra punkt 4 har vi $\cos(120)=-\frac{1}{2}$ og $\sin(120)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\tan(120)=\frac{\sin(120)}{\cos(120)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}$$

135º = 180º - 45º, så ved betragtningerne fra punkt 4 har vi $\cos(135)=-\sqrt{\frac{1}{2}}$ og $\sin(135)=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$$\tan(45)=\frac{\sin(45)}{\cos(45)}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{-\sqrt{\frac{1}{2}}}=-1.$$

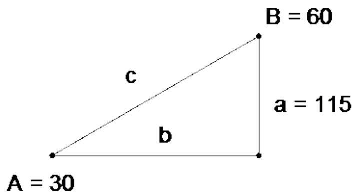
Øvelse 2

1)

$$\sin(30) = \frac{a}{10} \Rightarrow a = 10\sin(30) = 5$$

$$\cos(30) = \frac{b}{10} \Rightarrow b = 10\cos(30) = 8,660$$

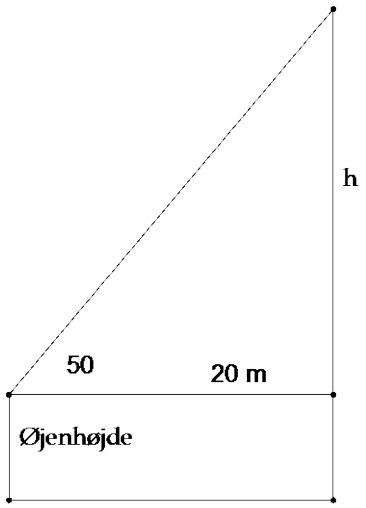
3)



$$\tan(30) = \frac{115}{b} \Rightarrow b = \frac{115}{\tan(30)} = 199,19$$

$$\sin(30) = \frac{115}{c} \Rightarrow c = \frac{115}{\sin(30)} = 230$$

Øvelse 3



$$\tan(50) = \frac{h}{20} \Rightarrow h = 20 \cdot \tan(50) = 23,8$$

Træets højde er lig øjenhøjden + 23,8 m.

Øvelse 4

30º	**60°**	55	95,26	**110**
22,6º	67,4	**5**	**12**	13
66,9º	23,1	77,24	**33**	**84**
80°	10	170,14	**30**	172,76
78º	**12°**	**1200**	255,07	1226,81
48º	**42°**	1090.62	**982**	1467,58
40°	**50°**	?	?	
12°	78º	36,59	172,15	**176**

Øvelse 6

Den ukendte vinkel er 100º og den ukendte side er 45,96.

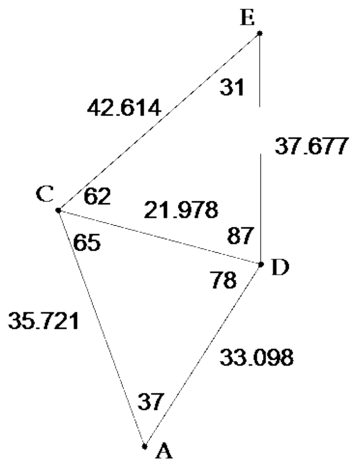
Øvelse 8

Vi viser kun de første resultater. Alle ukendte linjestykker er beregnet vha. sinusrelationerne.

Fx er |CE| beregnet ved

$$\frac{|CE|}{\sin(87)} = \frac{|CD|}{\sin(31)}$$

$$|CE| = \frac{|CD|}{\sin(31)} \cdot \sin(87) = \frac{21.978}{\sin(31)} \cdot \sin(87) = 42.614$$



og |DE| er beregnet ved

$$\frac{|DE|}{\sin(62)} = \frac{|CD|}{\sin(31)}$$

$$|DE| = \frac{|CD|}{\sin(31)} \cdot \sin(62) = \frac{21.978}{\sin(31)} \cdot \sin(62) = 37.677$$

Øvelse 9

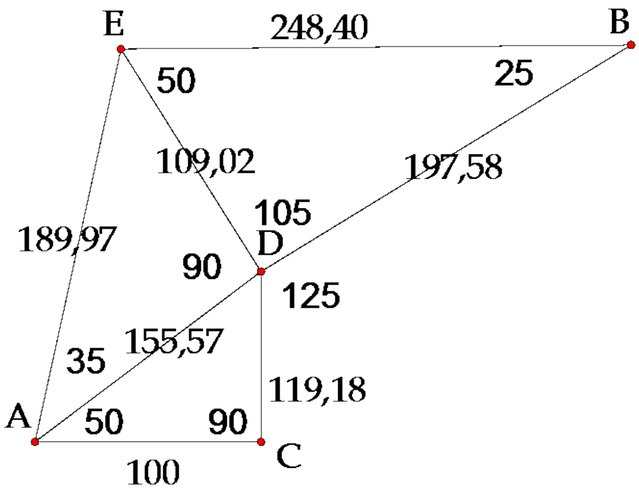
De ukendte størrelser 22,4º, 107,6º og en sidelængde på 12,05.

Øvelse 10

$$\frac{|CD|}{100} = \tan(50) \Rightarrow |CD| = 119{,}18$$

$$\frac{100}{|AD|} = \cos(50) \Rightarrow |AD| = 155{,}57$$

$$\frac{|ED|}{155{,}7} = \tan(35) \Rightarrow |ED| = 109{,}02$$



$|AE|$ findes ved Pythagoras' sætning.

$|DB|$ og $|EB|$ findes ved hjælp af sinusrelationen.

$|CB|$ bestemmes nu ved hjælp af cosinusrelationen:

$$|CB|^2 = |CD|^2 + |DB|^2 - 2 \cdot |CD||DB| \cdot \cos(125)$$

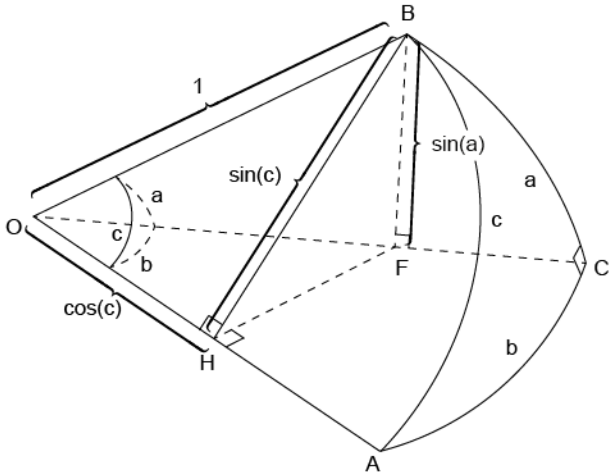
$$|CB|^2 = 119{,}18^2 + 197{,}58^2 - 2 \cdot 119{,}18 \cdot 197{,}58 \cdot \cos(125)$$

$$|CB|^2 = 80.254{,}41$$

$$|CB| = 283{,}3$$

Kapitel 11 Kuglefladens geometri

Øvelse 3



I $\triangle OFB$ er $\cos(A) = \dfrac{HF}{\sin(c)}$

$$\tan(b) = \frac{HF}{\cos(c)}$$

$$\tan(c) = \frac{\sin(c)}{\cos(c)}$$

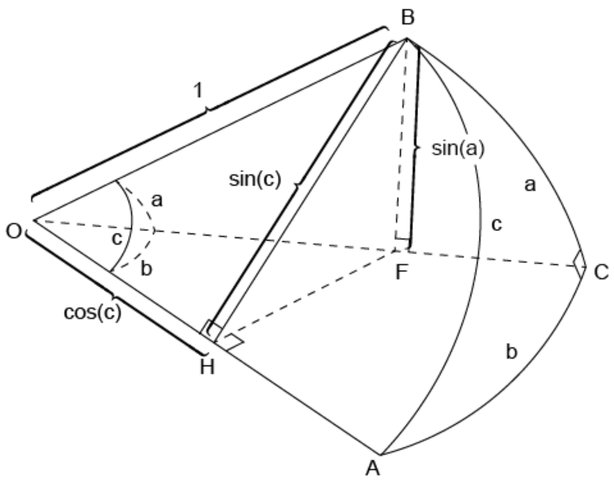
$$\frac{\tan(b)}{\tan(c)} = \frac{HF}{\cos(c)} \bigg/ \frac{\sin(c)}{\cos(c)} = \frac{HF}{\sin(c)} = \cos(A)$$

Mao. $\cos(A) = \dfrac{\tan(\text{hosliggende})}{\tan(\text{hypotenusen})}$

Undersøgelse 1

1) Da den foreslåede trekant er ligesidet med tre rette vinkler, kan der aldrig komme til at gælde noget i stil med $a^2 + b^2 = c^2$, eftersom det ville betyde at 2 = 1.

2)



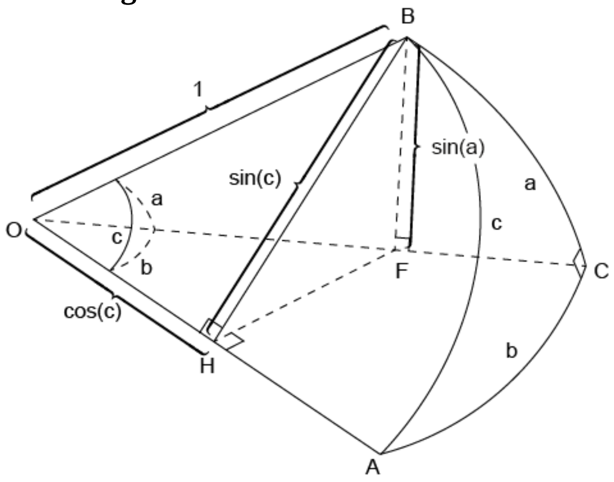
$$\cos(b) = \frac{\cos(c)}{OF}$$

$$OF = \cos(a)$$

I alt

$$\cos(b) = \frac{\cos(c)}{OF} = \frac{\cos(c)}{\cos(a)} \Rightarrow \cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

Undersøgelse 2



$$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)} = \frac{\sin(\text{modstående katete})}{\sin(\text{hypotenusen})}$$ (retvinklet sfærisk formel 1)

$$\cos(A) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} = \frac{\tan(\text{hosliggende katete})}{\tan(\text{hypotenusen})}$$ (retvinklet sfærisk formel 2)

$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$$

(retvinklet sfærisk formel 3)

$$\cos(\text{hypotenusen}) = \cos(\text{katete 1}) \cdot \cos(\text{katete 2})$$

No	A	B	a radianer	b radianer	c radianer
1		45 grader	$\frac{\pi}{4}$		

$$\cos(B) = \frac{\tan(a)}{\tan(c)}$$

$$\cos(45°) = \frac{\tan(\frac{\pi}{2})}{\tan(c)}$$

$$\tan(c) = \frac{\tan(\frac{\pi}{4})}{\cos(45°)} = \sqrt{2}$$

$$c = 0{,}9553$$

$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b)$

$\cos(b) = \dfrac{\cos(c)}{\cos(a)} = \dfrac{\cos(0,9553)}{\cos(\frac{\pi}{4})} = 0,8165$

$b = 0,6155$

$\cos(A) = \frac{\tan(b)}{\tan(c)} = \frac{\tan(0,6155)}{\tan(0,9553)} = 0,5$

$A = 60°$

No	*A*	*B*	*a* radianer	*b* radianer	*c* radianer
2	30 grader		$\frac{\pi}{6}$		

$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$

$\sin(30°) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\sin(c)}$

$\sin(c) = \frac{\sin(\frac{\pi}{6})}{\sin(30°)} = 1$

$c = \frac{\pi}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(a) \cdot \cos(b)$

$\cos(b) = 0$

$b = \frac{\pi}{2}$

$\sin(B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)} = 1$

$B = 90°$

No	*A*	*B*	*a* radianer	*b* radianer	*c* radianer
3	90 grader	90 grader			

$\sin(A) = \dfrac{\sin(a)}{\sin(c)} \Rightarrow \sin(90°) = \dfrac{\sin(a)}{\sin(c)} \Rightarrow 1 = \dfrac{\sin(a)}{\sin(c)} \Rightarrow a = c$. Tilsvarende får man, da

$\sin(B) = \dfrac{\sin(b)}{\sin(c)}$, at også *b* = *c*.

1/4 af en storcirkel er $\frac{\pi}{2}$, så alle tre sider er $\frac{\pi}{2}$.

No	*A*	*B*	*a* radianer	*b* radianer	*c* radianer
4			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	

$$\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) = \cos(1)\cdot\cos(1) = 0{,}2919$$
$$c = 1{,}2746$$

$$\cos(c) = \cos(\tfrac{\pi}{4})\cdot\cos(\tfrac{\pi}{4})$$
$$\cos(c) = 0{,}5$$
$$c = 1{,}0472$$

$$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\sin(1{,}0472)} = 0{,}8165$$
$$A = 54{,}74°$$

Samme udregning gælder for *B*, så *B* = 54,74°.

No	*A*	*B*	*a* radianer	*b* radianer	*c* radianer
5	60 grader	45 grader			

Udledning af formel:

$$\frac{\text{Formel1}}{\text{Formel2}} \Rightarrow$$
$$\frac{\sin(A)}{\cos(A)} = \frac{\frac{\sin(a)}{\sin(c)}}{\frac{\tan(b)}{\tan(c)}} \Rightarrow$$
$$\tan(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}\cdot\frac{\tan(c)}{\tan(b)} = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}\cdot\frac{\frac{\sin(c)}{\cos(c)}}{\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\sin(a)}{\cos(c)}\cdot\frac{\cos(b)}{\sin(b)} = \frac{\sin(a)}{\cos(a)\cos(b)}\cdot\frac{\cos(b)}{\sin(b)} = \tan(a)/\sin(b)$$

og tilsvarende symmetrisk

$$\tan(B) = \tan(b)/\sin(a)$$

Heraf fås

$$\tan(A)\tan(B) = \tan(b)/\sin(a)\cdot\tan(a)/\sin(b) = \frac{1}{\cos b\cdot\cos a} = \frac{1}{\cos c}$$

eller

$$\cos(c) = \frac{1}{\tan(A)\tan(B)}$$

Vi kan nu få hul på opgaven, idet:

$$\cos(c) = \frac{1}{\tan(A)\tan(B)} = \frac{1}{\tan(60°)\tan(45°)} = 0,5774 \Rightarrow$$
$$c = 0,6155$$

$$\sin(A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)} \Rightarrow$$

$$\sin(60°) \cdot \sin(0,6155) = \sin(a) \Rightarrow$$
$$a = 0,2928$$

$$\sin(B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)} \Rightarrow$$

$$\sin(45°) \cdot \sin(0,6155) = \sin(b) \Rightarrow$$
$$b = 0,4205$$

No	*A*	*B*	*a* radianer	*b* radianer	*c* radianer
6	20 grader				2

$$\sin(A) = \tfrac{\sin(a)}{\sin(c)} \Rightarrow \sin(a) = \sin(A) \cdot \sin(c) = 0,3110 \Rightarrow$$
$$a = 0,3162$$

$$\cos(2) = \cos(0,3162) \cdot \cos(b) \Rightarrow$$

$$\cos(b) = -0,4374 \Rightarrow$$
$$b = 2,0235$$

$$\sin(B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)} = \frac{\sin(2,0235)}{\sin(2)} = 0,9890 \Rightarrow$$
$$B = 81,48°$$

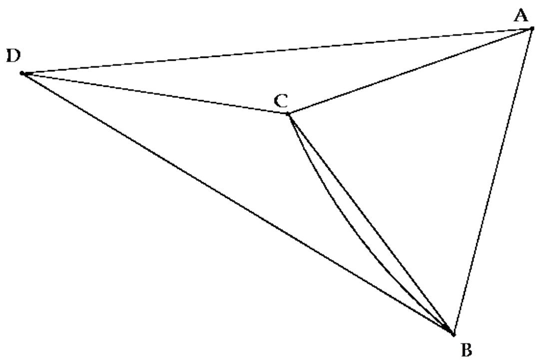
Kapitel 12 Grafteori og topologi

Øvelse 1

Et godt svar bør handle om antallet af knuder med ulige valens.

Øvelse 2

En mulighed er



Øvelse 3

Summen af valenser er et lige tal, fordi enhver kant begynder og slutter ved et punkt. Derfor er summen af valenser lig med 2 · antallet af kanter.

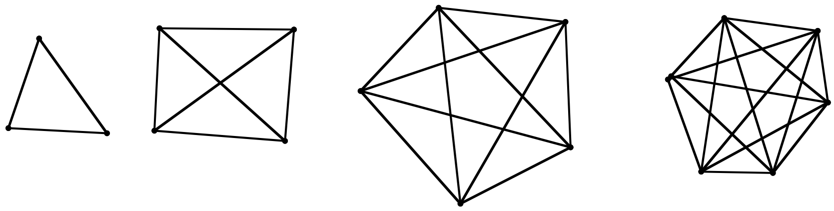
Øvelse 4

Hvis der er et ulige antal kanter med ulige valens, vil summen af alle valenser blive et ulige tal. Det stemmer ikke med konklusionen fra øvelse 3. Derfor er der et lige antal knuder med ulige valens.

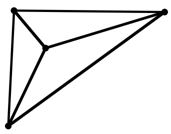
Øvelse 5

Hvis *A* og *B* er de eneste knudepunkter, der har ulige valens, kan vi tilføje en kant til grafen, som forbinder *A* med *B*. Derved får alle knudepunkter lige valens, og vi kan lave en rundtur i grafen, der starter og slutter i *A*, og som går ad alle kanter. Ved at skifte rundt på den rækkefølge vi går ad kanterne, kan vi sikre os, at den sidste kant i rundturen er den ekstra kant mellem *A* og *B*. Turen rundt i grafen uden denne kant vil derfor være en tur rundt ad alle kanter fra *A* til *B*.

Øvelse 6



K_4 kan tegnes som plan graf som



K_5 kan ikke tegnes som plan graf, og derfor (hvorfor) kan K_6 heller ikke.

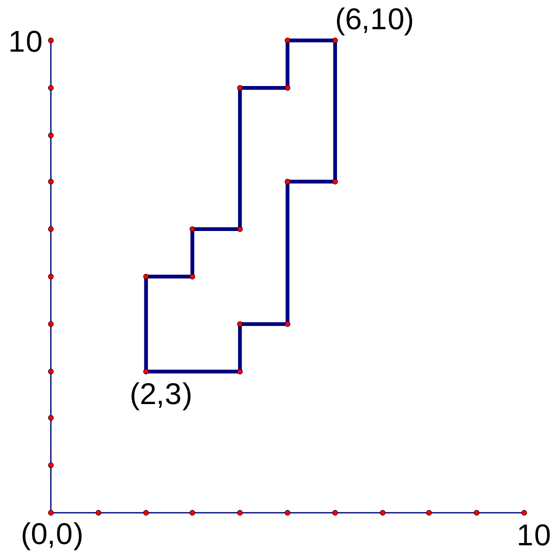
Hvert knudepunkt i K_n er forbundet til $n - 1$ knudepunkter. Derfor er den samlede valens lig $n(n - 1)$ og antallet af kanter er derfor $\frac{n(n-1)}{2}$.

Øvelse 8

Ved at til tilføje en ny kant, der starter i et eksisterende punkt og ender i et nyt punkt, øges både *P* og *K* med én. Men da de indgår med modsat fortegn i formlen for Eulertallet, vil ændringerne ophæve hinanden.

Tilføjes en kant der forbinder to punkter kommer den nødvendigvis til at dele et område (en flade) op i to, så i denne situation forøges *F* og *P* begge med 1, hvilket udlignes i Euler-tallet, der forbliver på 2.

Øvelse 10



Figuren viser to forskellige taxa-veje fra (2,3) til (6,10). Alle ‘linjestykker’ mellem disse to punkter er 11 lange. Der er 330 forskellige. For at finde dette antal kan man have brug for noget kombinatorik, der bl.a. findes på lærebogssystemets hjemmeside.