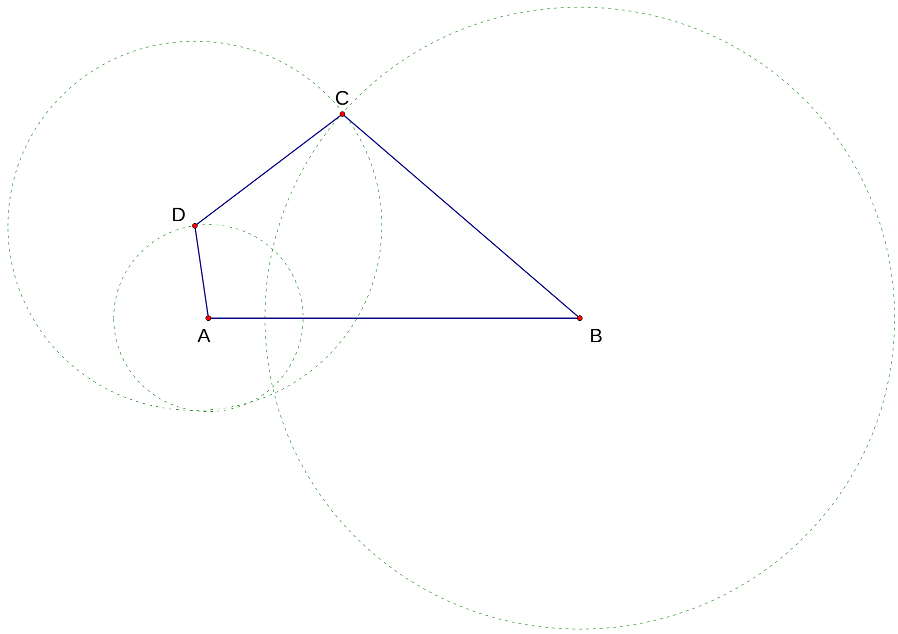
Løsningsforslag til Geometri 1.-6. klasse

Bemærk, at vi benytter betegnelsen øvelser som en meget bred betegnelse. Derfor er der også nogle af vores øvelser, der nærmer sig kategorien 'undersøgelser', dem giver vi som oftest ikke løsningsforslag til, ligesom svar til kategorien 'overvej-diskuter' ikke giver megen mening.

Kapitel 1 Eksperimentel geometri

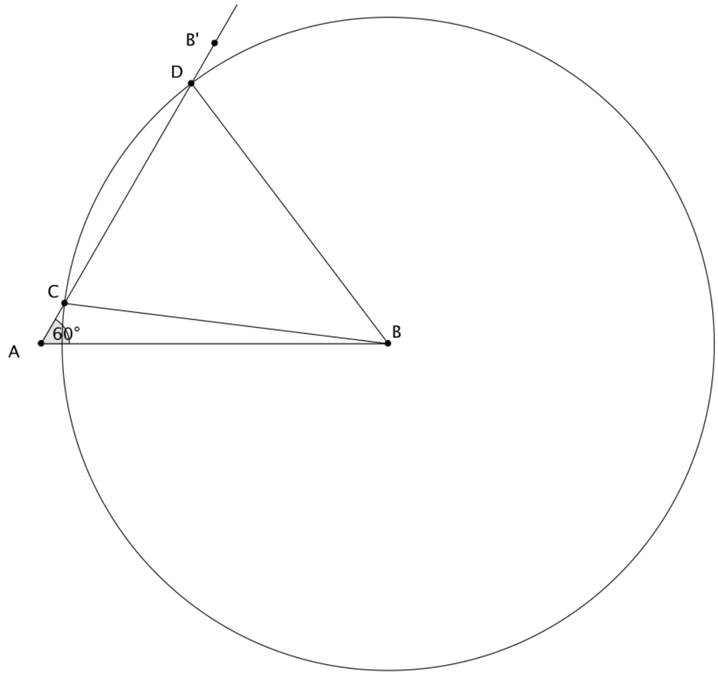
Øvelse 1

3) Der er uendeligt mange løsninger. Den viste er fundet ved at afsætte et linjestykke *AB* på 20 cm, tegne en cirkel med centrum i *B* og radius 17 cm, tegne en cirkel med centrum i *A* og radius 5 cm. Dernæst bestemmes to punkter *C* og *D* på de to cirkelperiferier, hvor afstanden er 10 cm, idet man vælger *D* på den lille cirkel og bruger *D* som centrum for en cirkel med radius 10 cm, som skærer den store cirkel i *C*.



Øvelse 2

5) Linjestykket *AB* lig 100 mm afsættes, og vinkel *A* lig 60˚ afsættes. Vinklens venstre ben forlænges til skæring med en cirkel, der har centrum i *B* og radius 94 mm, hvorved skæringspunkterne *C* og *D* fremkommer. Altså er der to løsninger.



Undersøgelse 3

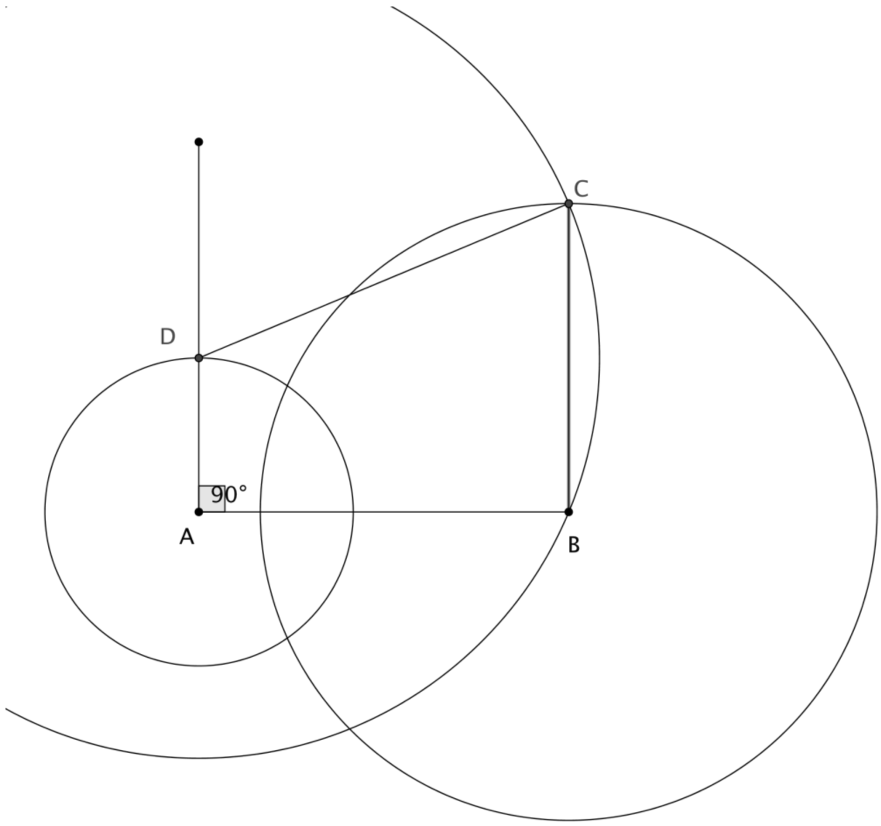
1) Gårdejerne søger et punkt *P* med samme afstand til alle gårdene *A*, *B* og *C*. Da punktet *P* skal have lige stor afstand til *A* og *B*, må det ligge på midtnormalen for *AB* og tilsvarende for de øvrige siders midtnormaler. *P* er derfor skæringspunktet mellem midtnormalerne til linjestykkerne *AB*, *BC* og *AC*. Der er altså kun ét punkt med den søgte egenskab, når man ser strengt geometrisk på det.

Spørgsmålet er imidlertid, om denne løsning er den smarteste. Det kunne være billigere at minimere den samlede rørlængde hen til brønden, altså *AP* + *BP* + *CP*, og dette ville give en anden placering, som man kan eksperimentere sig frem til ved at tegne og måle (eller ved at bruge målefunktionen i et geometrisk tegneprogram) og så flytte *P* rundt, indtil man får den mindste værdi for *AP* + *BP* + *CP*. Det viser sig, at positionen udmærker sig ved, at vinklerne mellem de fra *P* udløbende rør er lige store og altså 120˚.

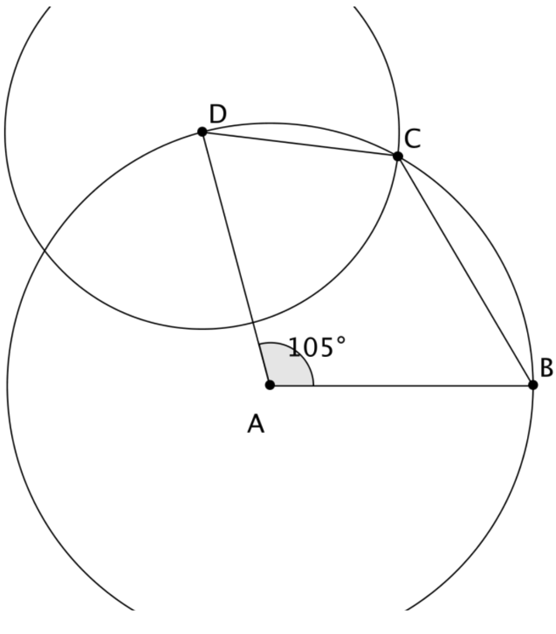
2) Grænserne for den enkeltes arbejdsmark udgøres af midtnormalerne til linjestykkerne *AB*, *BC* og *AC*.

Øvelse 3

Vi afsætter først vinkel *A* med sine to ben, *AB* på 6 og *AD* på 2½. Med hhv. *D* og *B* som centrum tegnes to cirkler med radier hhv. 6½ og 5. Hvor de skærer hinanden findes punktet *C*:



Øvelse 4

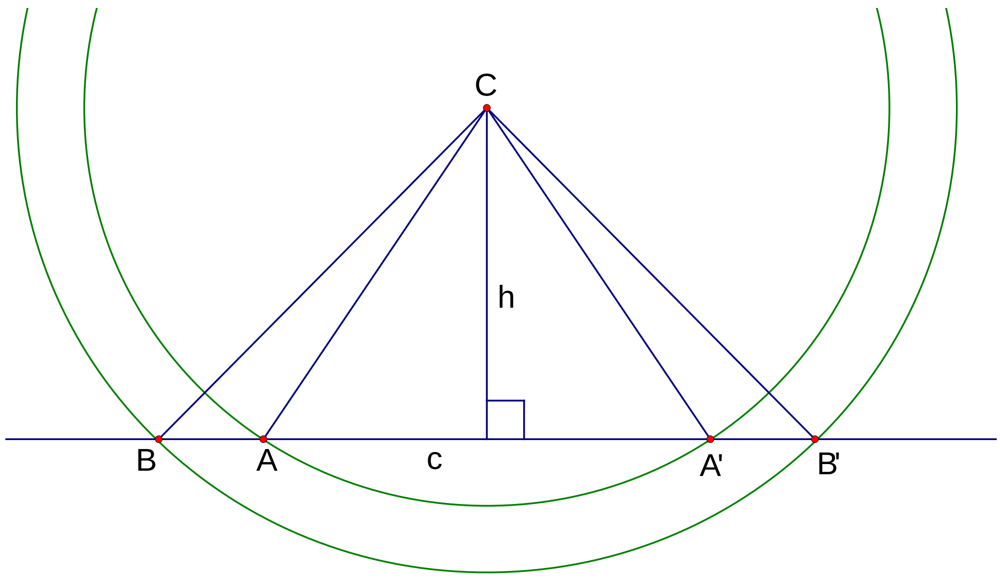


Øvelse 5

1) Linjen *c* tegnes. Punktet *C* afsættes i en afstand på 10 cm fra *c*. Højden h_c afsættes.

Med centrum i *C* og radius 12 cm tegnes en cirkel. Skæringspunkterne med *c* betegnes *A* og *A'*. Tilsvarende tegnes en cirkel med centrum i *C* og radius 14 cm. Skæringspunkterne med *c* betegnes *B* og *B'*.

Der er således fire løsninger: $\triangle ABC,\ \triangle AB'C,\ \triangle A'B'C\ og\ \triangle A'BC$, de er dog to og to kongruente.

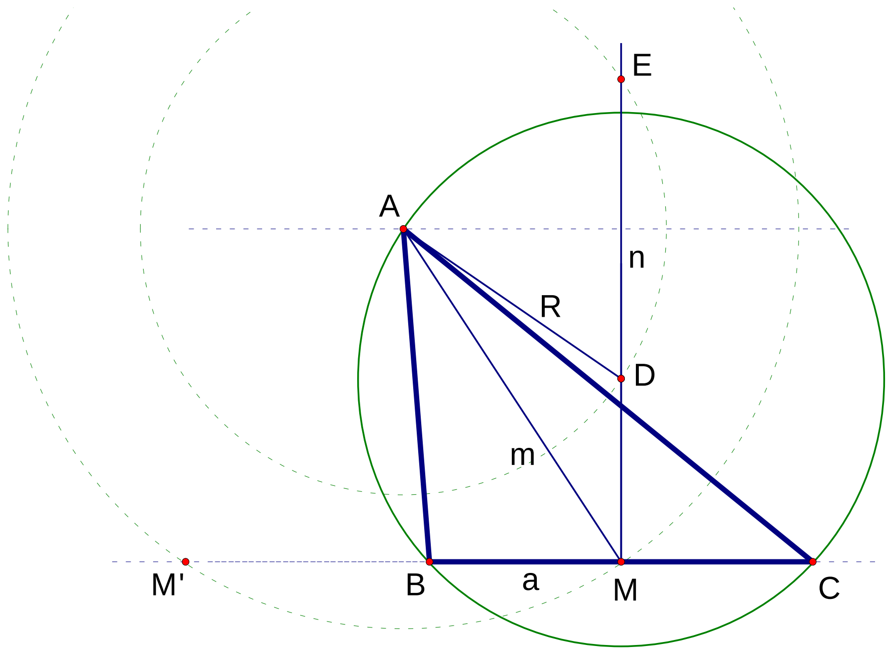


5) Inspireret af at h_a er lig 10 cm tegnes to parallelle linjer med afstand 10 cm, den nederste kaldes *a*. På den øverste vælges et punkt som *A*. Med *A* som centrum og radius 12 cm tegnes en cirkel, denne skærer *a* i to punkter, *M* og *M'*, det giver to løsninger, her viser vi kun den ene. Skæringspunktet *M* udgør midtpunkt på *BC*.

Om *B* og *C* ved vi kun, at de skal ligge på *a*. Men vi ved, at den omskrevne cirkel har midtnormalernes skæringspunkt som centrum, derfor tegnes midtnormalen *n* til *BC*. For at finde centrum for den omskrevne cirkel tegnes en cirkel med centrum i *A* og radius 8 cm. Cirklen skærer *n* i to punkter *D* og *E*, et af disse udgør centrum. *E* kan ikke bruges, da en cirkel med radius 8 cm og centrum i *E* ikke kan nå *a*, hvor *B* og *C* skal ligge, altså er *D* centrum.

Med centrum i *D* og radius 8 cm tegnes en cirkel, hvor denne skærer *a*, har vi *B* og *C*.

Havde vi benyttet *M’* havde vi fået en hermed kongruent trekant.



Kapitel 2 Lokalisering, afstand og bevægelse

Øvelse 4

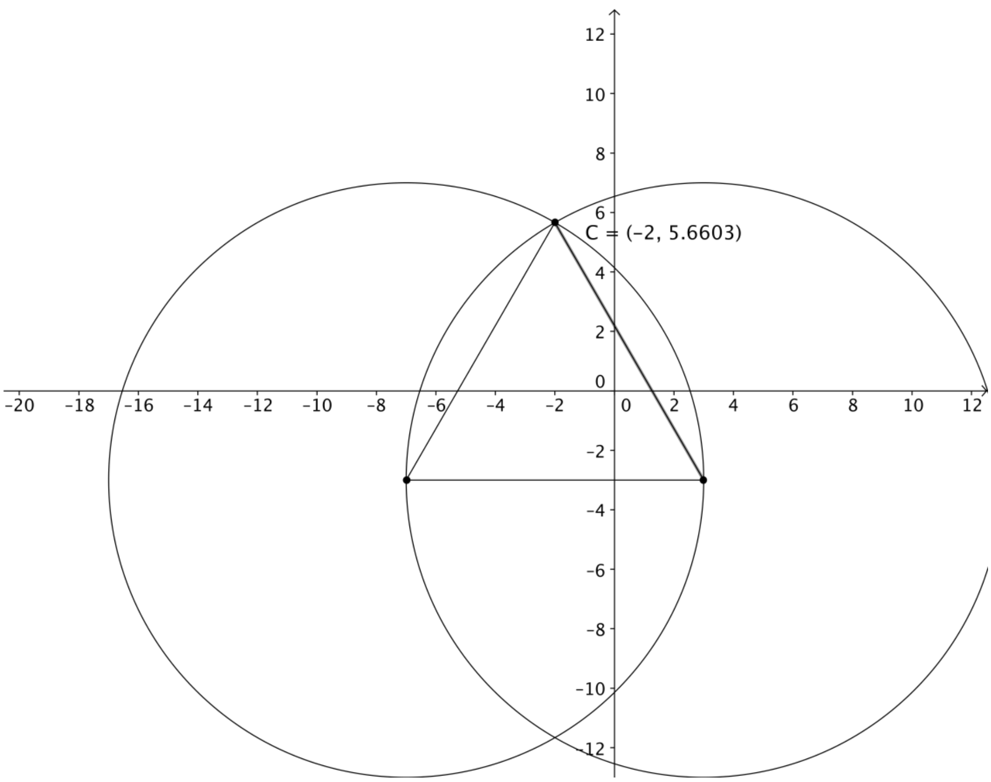
1) $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$

2) $a = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{26^2 + 24^2} = \sqrt{100} = 10$

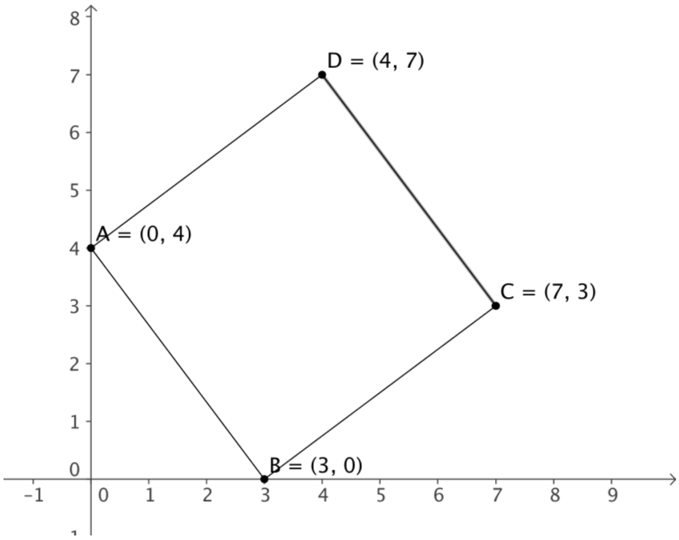
3) og 4) $|AB| = 10$. Tegn situationen og find en passende retvinklet trekant med kateter 6 og 8.

Øvelse 5

|AC| = |AB| = 3 – (-7) = 10. Højden *h* i den ligesidede trekant findes ved hjælp af Pythagoras' sætning: $h^2 + 5^2 = 10^2 \Rightarrow h = 5\sqrt{3} = 8,6603$. Så *C* får de på figuren angivne koordinater.



Øvelse 6



D = (4,7).

Sidelængden = $\sqrt{(0-4)^2+(3-0)^2}=5$.

Diagonallængden = $\sqrt{(4-3)^2+(0-7)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

Øvelse 7

Formlen bliver $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

Øvelse 10

For at finde koordinatudtrykket for vektoren $\overrightarrow{AB}$ skal vi ifølge teorien øverst på side 677 parallelforskyde $\overrightarrow{AB}$, så startpunktet for $\overrightarrow{AB}$ falder i (0,0). Dette kan man gøre ved at trække x_1 fra førstekoordinaten og y_1 fra andenkoordinaten i de to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$. Herved får det nye endepunkt B' koordinaterne (x_2-x_1, y_2-y_1). Det betyder, at $\overrightarrow{AB}$ har koordinaterne (x_2-x_1, y_2-y_1).

Øvelse 13

1) Tur A og tur C bringer os hjem igen.

2) Hvis man adderer alle *x*-koordinaterne og får 0 som resultat samt alle *y*-koordinaterne og ligeledes får 0 som resultatet, så fører turen tilbage til udgangspunktet. Det er, fordi vektorer adderes ved at addere *x*-koordinaterne for sig og *y*-koordinaterne for sig. Fx
$(3,6)+(-7,4)=(3+(-7),6+4)=(-4,10)$

Øvelse 14

Efter 20 minutter er han nået $\frac{1}{3}$ ud af vektoren (3,4), dvs. nået ud til begyndelsespunktet plus $\frac{1}{3}$ af vektoren (3,4): $\left(\frac{1}{3}\cdot 3, \frac{1}{3}\cdot 4\right) = \left(1, \frac{4}{3}\right)$, altså til $\left(-5,-2\right) + \left(1, \frac{4}{3}\right) = \left(-4, -\frac{2}{3}\right)$.

Efter en halv time er han kommet til begyndelsespunktet plus det halve af vektoren (3,4): $\left(\frac{1}{2}\cdot 3, \frac{1}{2}\cdot 4\right) = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, altså til $\left(-5,-2\right) + \left(\frac{3}{2}, 2\right) = \left(-\frac{7}{2}, 0\right)$.

Efter to timer er han kommet dobbelt så langt, altså begyndelsespunktet plus 2 gange vektoren (3,4): $\left(2\cdot 3, 2\cdot 4\right) = \left(6,8\right)$, altså til $\left(-5,-2\right) + \left(6,8\right) = \left(1,6\right)$

Generelt kan vi se, at til tiden *t* er han nået til begyndelsespunktet plus vektoren (3*t*, 4*t*), således at svar nr. 2 er det korrekte.

Øvelse 15

En behagelighed ved denne tur er at Ali kommer hjem igen, idet
$P(0) = (-5+0, -2-0) = (4-9, 10-12) = P(3)$.

Skal man afgøre, om han på noget tidspunkt går hurtigere end 5 km i timen, skal man se på koefficienterne til *t* på de to koordinater. I intervallet [1,2[ser vi, at der står hhv. –*t* og 5*t*, hvilket betyder, at han på en time bevæger sig 1 km (tilbage) i *x*-aksens retning og 5 km opad i *y*-aksens retning, hvilket klart sammenlagt giver mere end 5 km – dog ikke 6, idet han jo bevæger sig direkte og ruten beregnes ved Pythagoras' sætning til $\sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26} > 5\,\text{km/t}$

Kapitel 3 Undersøgelser af rumlige figurer

Her er ingen forslag til besvarelser, da øvelserne i den grad er en opfordring til selv at undersøge.

Kapitel 4 Bevisførelse i geometri

Øvelse 1

En mulig udlægning er, at den direkte vej, linjestykket, mellem to punkter aldrig er længere end summen af de to afstande man får ved at "gå" via et tredje punkt.

Øvelse 2

1) Vi antager, at *l* er parallel med *m*, og *m* er parallel med *n*. Vi skal vise, at *l* er parallel med *n*. Det gør vi med et indirekte bevis.

Vi antager, at *l* skærer *n* i et punkt *P*. Gennem punktet *P* har vi nu ifølge det forudsatte to linjer, der er parallelle med *m*, men ifølge aksiom 3 kan der igennem punktet *P* kun trækkes en linje parallel med *m*. Altså er *l* lig med *n*. Vi har hermed vist, at enten er *l* parallel med *n* eller også er *l* lig med *n*, og så er de også parallelle (definition 3).

2) Det er ikke noget bevis inden for den Euklidiske ramme, fordi det ikke bygger på definitioner, aksiomer og sætninger, vi allerede har vist, men derimod bygger på noget, vi af anden vej ved om parallelle linjer.

Øvelse 3

Formlen kan findes ved at dele *n*-kanten op i $(n-2)$ trekanter. Man får vinkelsummen $(n-2)\cdot 180°$

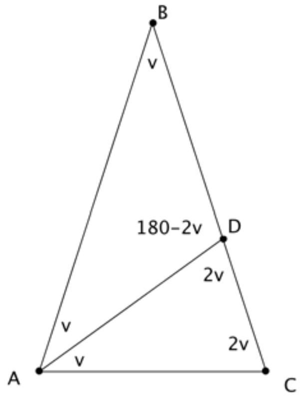
Øvelse 4

1) $\angle C$ og nabovinklen *z* udgør tilsammen to rette Vi ved også, at $\angle A + \angle B + \angle C$ også er to rette. Vi har altså i kort notation: $z + C = A + B + C$. Ifølge den 3. almene lov må vi gerne trække det samme fra på hver side, og vi ender med $z = A + B$, hvilket skulle bevises.

2) Det er ikke nok oplysninger til at bestemme alle tre vinkler.

3) Oplysningerne giver tre ligninger: B + C = 100; A + C = 150 og A + B = 90. Løses disse ligninger fås A = 70, B = 20 og C = 80. Men det kan ikke lade sig gøre. Den samlede vinkelsum bliver kun 170. Trekanten eksisterer altså ikke.

Øvelse 6



Trekant ADE er ligebenet, så vinklerne kan bestemmes ud fra *v*.

Trekant ADC er også ligebenet, så vinklerne kan også udtrykkes ved *v*.

I alt bliver $5v = 180$, $v = 36°$, og det tre vinkler i trekanten er 72°, 36 og 72°.

Øvelse 7

Den omvendte sætning må hedde: Hvis en trekant ABC har $\angle A = \angle B$, så er trekanten ligebenet, altså $AC = CB$.

Bevis (tegn selv):
Vi tegner vinkelhalveringslinjen *CM* i trekanten, de to trekanter *CAM* og *CMB* er kongruente, fordi de har to vinkler og dermed også den tredje vinkel parvis lige store, og de har *CM* fælles. Altså er $AC = CB$, hvilket skulle vises.

Alternativ:
Hvis man ikke er helt fortrolig med at bruge kongruenssætninger, kan man klare sig med et spejlingsargument, hvor man spejler trekanten i midtnormalen til *AB*. Men her har man i første omfang det problem, at man ikke kan vide, om midtnormalen går gennem *C*. Det kan man dog ret hurtigt argumentere for.

Øvelse 10

Der ligger en dobbeltpåstand i sætningen, som ofte overses:

1) Hvis et punkt *P* ligger på midtnormalen, så er $|PA| = |PB|$, og

2) Hvis et punkt *P* har egenskaben $|PA| = |PB|$, så ligger *P* på midtnormalen.
For at kunne komme i gang med beviserne for disse to påstande, må vi lige repetere, at midtnormalen for *AB* pr definition er den vinkelrette på midtpunktet for linjestykket *AB*. For at understrege at beviser bygger på ræsonnementer, præsenterer vi beviset uden tegninger, men opfordrer læseren til selv at få støtte fra tegninger, hvis det bliver nødvendigt for at følge tankegangen.

Bevis for 1) Vi viser at hvis et punkt *P* ligger på midtnormalen, så er |*PA*| = |*PB*|. Vi tegner først stykket *AB*, midtpunktet *M* og lader linjen *m* være vinkelret på *AB* i punktet *M*, og dermed er *m* altså midtnormal til *AB*. Vi lader *P* være et punkt på *m* og tegner *PA* og *PB*, så der opstår to trekanter *PMA* og *PMB*. Disse to trekanter er kongruente ifølge K3, idet |*MA*| = |*MB*|, |*PM*| = |*PM*|, og den mellemliggende vinkel ved *M* i begge trekanter er ret. Derfor er også |*PA*| = |*PB*|.

Bevis for 2) Vi vil altså vise, at hvis et punkt *P* har egenskaben |*PA*| = |*PB*|, så ligger *P* på midtnormalen.

Lad os tegne *AB* og punktet *P* samt linjestykkerne *PA* og *PB*. I udgangspunktet ved vi blot, at |*PA*| = |*PB*|, men ved anvendelse af sætning 3 ved vi også, at vinklerne ved grundlinjen i denne ligebenede trekant er lige store. Vi nedfælder nu den vinkelrette fra *P* på linjestykket *AB* – lad os sige den ender i punktet *N*. Så er trekant *PNA* kongruent med trekant *PNB*.

For hver af trekanterne har en ret vinkel, og vi har netop set, at de har ‘vinklerne ved grundlinjen’ lige store. Det lægger op til, at vi kan bruge K2, hvis vi bare kan finde en side, som er lige stor i de to trekanter. Men her vil *PM* være et indlysende valg, da denne side er fælles for de to trekanter. Så de er kongruente, og dermed gælder også, at |*NA*| = |*NB*|, så *N* er midtpunkt, hvilket sammenholdt med de rette vinkler betyder, at linjen gennem *N* og *P* er midtnormal. *P* ligger altså på midtnormalen.

Øvelse 11

Vi fortsætter øvelsen i at lave beviser uden tegninger. Men vi forestiller os trekant *ABC* tegnet og ligeledes to af midtnormalerne *n* og *m* for hhv. *AB* og *BC*. Lad *P* være skæringspunktet for *n* og *m*.

Da *P* ligger på *n*, gælder ifølge sætning 4, at |*PA*| = |*PB*|. Men *P* ligger også på *m*, hvilket på samme måde betyder, at |*PB*| = |*PC*|.

Kombineres de to ligheder fås |*PA*| = |*PC*|, hvilket betyder, at *P* ligger på midtnormalen til *AC*. *P* er altså det fælles skæringspunkt for alle tre midtnormaler. Ved at kombinere lighederne ses, at |*PA*| = |*PB*| = |*PC*|. Kaldes denne størrelse for *r*, ses at en cirkel med centrum i *P* og radius *r* vil gå lige akkurat gennem alle trekantens hjørner.

Øvelse 12

I udgangspunktet har vi et parallelogram, altså en firkant *ABCD* med modstående sider parallelle, og vi vil bevise, at de modstående sider også er lige store. Fordi trekanter er det eneste, vi faktisk ved noget om i den teori, vi har opbygget, tegnes diagonalen *AC*, der giver os to trekanter *ABC* og *ADC* at ræsonnere ud fra. Da vi har en del parallelle linjer giver aksiom 4 (om at ensliggende vinkler ved sådanne er lige store) os nogle lige store vinkler: $BCA = CAD$ og $CAB = ACD$. Da endvidere siden *AC* er fælles for de to trekanter, kan vi ved hjælp af K2 konkludere, at de to trekanter er kongruente. Det betyder specielt, at de øvrige sider også er parvis lige store. |*AB*| = |*CD*| og |*BC*| = |*AD*|, hvilket skulle vises.

Kapitel 5 Elementer af geometriens didaktik

Ingen løsningsforslag

Kapitel 6 Måling i indskolingen – om at bestemme længder

Vi giver principielt nødig svarforslag til undersøgelser, men hvis ikke du kan få hul på undersøgelse1 kunne du starte med regnestykket (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10):2

Kapitel 7 Måling og Areal

Øvelse 6

1) Vi har et kvadrat med areal 257 m^2. Fra sætning 5 (der siger, at forstørres alle sidelængder i en polygon med en faktor *f*, så bliver arealet f^2 gang så stort) har vi, at hvis omkredsen fordobles, så bliver arealet 2^2 gang så stort, altså $4 \cdot 257\ m^2 = 1028\ m^2$.

2) Hvis sportspladsen er blevet forstørret med samme faktor på længde og bredde, kan vi tillade os at anvende sætning 5. Da arealet er blevet firdoblet og da $4 = 2^2$, må der være tale om en lineær forstørrelse med en faktor 2. Omkredsen er således blevet 1800 meter.

Men her er virkelig tale om et skøn, fordi vi ikke ved noget om, hvordan sportspladsen er blevet større. Hvis man nysgerrigt følger dette spor, så skifter opgaven karakter af en øvelse til en undersøgelse. Undersøgelsen vil vise, at hvis sportspladsen af en eller anden mærkelig grund fra starten var meget lang og smal, så ville omkredsens vækst afhænge meget af om den nye sportsplads blev lavet ved at lægge fire af de gamle i forlængelse af hinanden eller ved siden af hinanden langs de lange sider. Teoretisk set kan man herved, på den ene side få at omkredsen kun vokser ganske lidt, og på den anden at den vokser med en faktor tæt på fire ligesom arealet.

3) Hvis sidelængderne i rektanglet vælges til hhv. 99,9 m og 0,1 m bliver arealet = $(99{,}9 \cdot 0{,}1)\ m^2 = 9{,}99\ m^2$, altså kan arealet blive mindre end 10 m^2.

Det største areal, som et rektangel med en omkreds på 200 m kan få, er, når rektanglet har form som et kvadrat med sidelængden 50 m, hvor arealet = $(50 \cdot 50)\ m^2 = 2500\ m^2$, altså kan arealet ikke bliver større end 5000 m^2.

4) Dette er et spørgsmål, der har optaget matematikerne siden den græske oldtid, og problemet har navn efter et gammelt sagn: Didos problem, men kaldes også det isoperimetriske problem. Det drejer sig om, hvor meget areal man kan omslutte med en lukket snor med given længde.

Det er nemt nok at se, at arealet kan blive meget lille, hvis man trækker snoren ud til en dobbelt linje. Så det udfordrende problem i denne forbindelse er, at få arealet så stort som muligt. Vi har ovenfor nævnt, at hvis formen skal være rektangulær, så har kvadratet den optimale form.

Men hvad nu hvis det skal være en trekant, en femkant, eller hvis der slet ikke er krav til formen. En ledetråd i problemets udvikling har været, at det ser ud til, at arealet bliver større jo mere symmetri, der er i figuren.

Vi vil ikke ødelægge den fornøjelse, der er i at prøve kræfter med noget, det har taget menneskeheden omkring 2000 år at få rede på, men vil give et kort svar på spørgsmålet i opgaven:

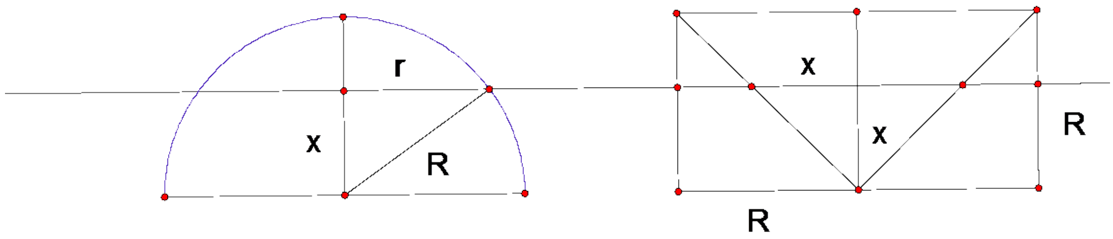
Svar: Ja, der er den sammenhæng, at en figur med omkreds *L* har et areal *A*, der tilfredsstiller uligheden: $0 \le A \le \frac{L^2}{4\pi}$. Men arealet kan antage alle værdier derimellem.

Øvelse 8

Hvis man tegner en skitse af situationen bliver det klart, at du, som løber i et spor, kommer til at løbe ad en længere bane end din makker i sporet lige ved siden af dig, altså et spor længere inde. På langsiderne løber I lige langt, men du kommer alt i alt til at løbe i en cirkel med 1,2 meter større radius, hvilket giver en tur, der er $2\pi r = 2\pi \cdot 1,2 = 7,54$ meter, hvorfor din startstreg bør være 7,54 meter længere fremme end hos din makker i sidesporet.

Kapitel 8 Rumfang

Øvelse 6



$r=\sqrt{R^2-x^2}$ arealet af tværsnitscirklen i højden x er derfor $\pi r^2=\pi\cdot(R^2-x^2)$.

I cylinderen er der et tværsnitsareal mellem keglen og cylinderen på $\pi\cdot R^2-\pi\cdot x^2=\pi\cdot(R^2-x^2)$.

Den halve kugles rumfang og rumfanget af cylinderen fratrukket keglen er derfor ens.

Cylinder – kegle = $\pi\cdot R^2\cdot R-\frac{1}{3}R\cdot\pi\cdot R^2=\frac{2}{3}\pi\cdot R^3$

Kuglens rumfang er derfor $2\cdot\frac{2}{3}\pi\cdot R^3=\frac{4}{3}\pi\cdot R^3$.

Opsamling på kapitel 8

2a) Lastbilen har et lovligt rumfang på 12,375 kubikmeter, mens rumfanget af siloen er $15\cdot\pi\cdot 3^2=424{,}115$ kubikmeter. Måler vi, hvor mange gange lastbilens rumfang går op i siloens rumfang, finder vi, at der er behov for 34,27 ture med lastbilen, hvor man så må runde op eller ned, alt efter hvor lovlig og sikkerhedsbevidst man er.

2b) Det samlede rumfang der transporteres bort med de 55 vogne, er $55\cdot(\frac{1}{2}\cdot(0{,}7+1{,}4)\cdot 1\cdot 3)=173{,}25$ kubikmeter eller 40,8% af siloens rumfang, hvorfor denne også må falde ca. 40,8 % i kornhøjde, altså 6 meter og 12 centimeter.

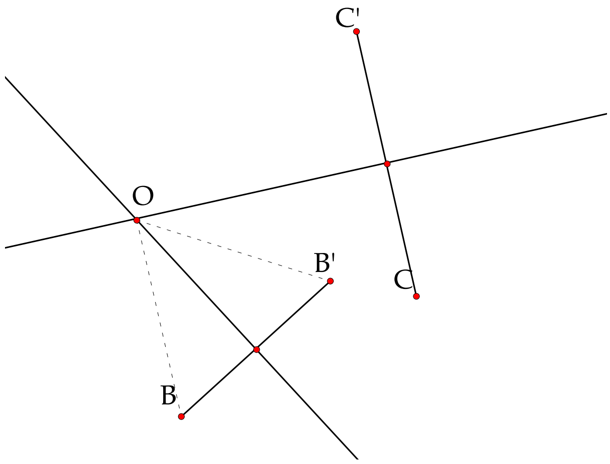
2c) Oplysningen om kegler er utilstrækkelig, men det er diameteren af grundfladen, der er 12 meter. Hvis vi kalder den ukendte højde for *h*, fås rumfanget af kornkeglen til $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\pi\cdot 6^2=37{,}7h$. Hvis det skal være lig med den fulde silos rumfang på 424,115, finder vi $h=11{,}25$ meter.

Kapitel 9 Tegning af model

Ingen løsningsforslag

Kapitel 10 Flytninger, eksperiment og argument

Øvelse 1



Omdrejningspunktet findes som skæringen mellem midtnormalerne til *BB*' og *CC*. Vinklen kan måles som vinkel *BOB*'.

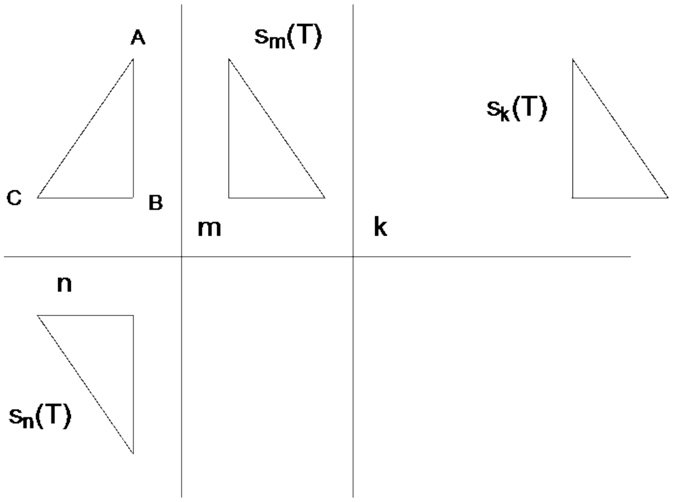
Undersøgelse 3

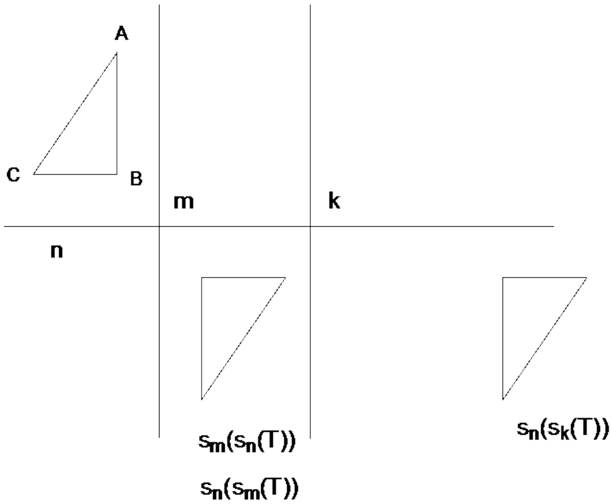
Ved at spejle en figur to gange efter hinanden i parallelle linjer parallelforskyder man figuren vinkelret på linjerne og med den dobbelte længde af afstanden mellem linjerne.

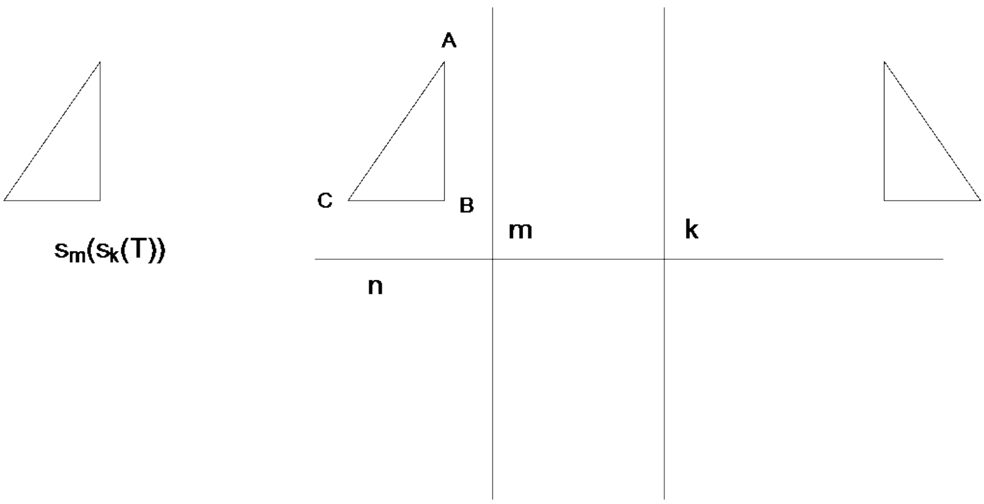
Undersøgelse 4

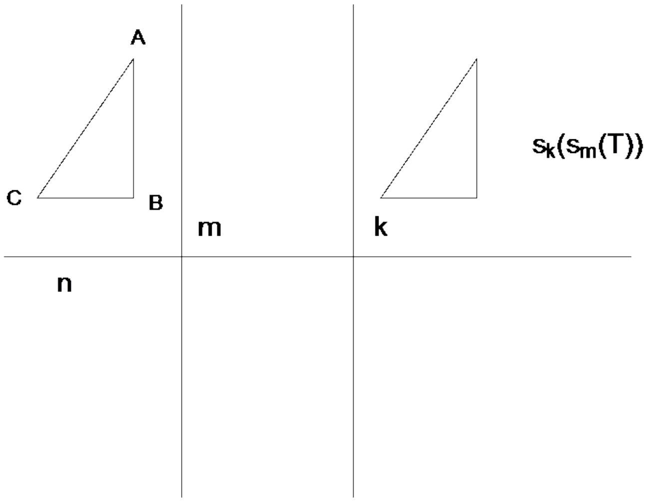
Ved spejle en figur to gange efter hinanden i linjer, der skærer hinanden får man en drejning af figuren omkring linjernes skæringspunkt. Drejningsvinklen er den dobbelte af vinklen mellem linjerne.

Øvelse 2









$s_n \circ s_k$ er en drejning på 180 grader om de to linjers skæringspunkt.

$s_m \circ s_k$ er en parallelforskydning.

$s_k \circ s_m$ er en parallelforskydning med samme længde men modsat retning af $s_m \circ s_k$.

Øvelse 3

$s_n \circ s_k$ drejning på 180 grader om linjernes skæringspunkt.

$s_m \circ s_k$ drejning på 120 grader med uret om linjernes skæringspunkt.

$s_k \circ s_m$ drejning på 120 grader mod uret om linjernes skæringspunkt.

Undersøgelse 5

Hvis de tre linjer er parallelle eller skærer hinanden i et punkt, er resultatet en enkeltspejling.

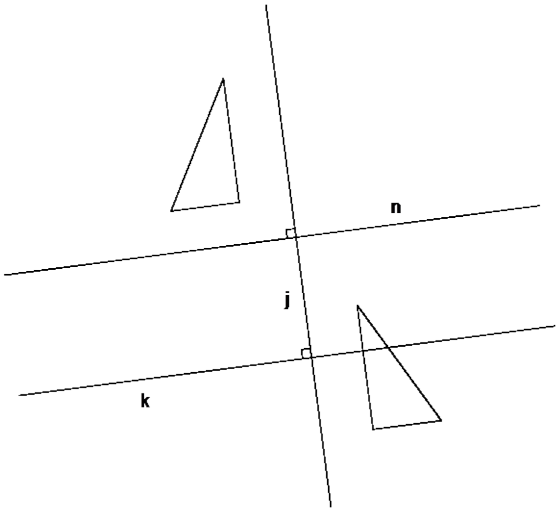
Hvis linjerne ligger helt tilfældigt er resultatet en såkaldt glidespejling (se mere i øvelse 5)

Øvelse 5

Der er ikke tale om en spejling her og heller ikke en parallelforskydning. Men der kan heller ikke være tale om en drejning, da omløbsretningen i trekanten er anderledes i billedtrekanten end i den oprindelige. Der er altså tale om en ny slags flytning.

Flytningen er en såkaldt glidespejling. *A* parallelforskydes først mod højre, hvorefter den spejles over i *B*.

Øvelse 6



Ja, ordet 'glidespejling' synes rimeligt at anvende, da resultatet fremkommer ved først at *glide* langs j og derefter *spejle* i j. Man kan også få samme resultat med operationerne i omvendt rækkefølge, men har altså forkastet ordet 'spejleglidning'.

Øvelse 7

f_1 er en parallelforskydning med to gange $|AD|$ mod venstre.

f_2 er en parallelforskydning med to gange $|AB|$ nedad.

f_3 er en drejning på 180 grader om O.

f_4 er en drejning på 90 grader mod uret om A.

f_5 en drejning på 180 grader om A.

f_6 er en glidespejling.

f_9 er en ikke en glidespejling, men en ren spejling i n – uden glidning.

Kapitel 11 Symmetrier og mønstre

Øvelse 2

1. Præciseringerne vil sikkert omfatte følgende:

- Ved at spejle en figur to gange efter hinanden i parallelle linjer parallelforskyder man figuren vinkelret på linjerne og med den dobbelte længde af afstanden mellem linjerne.

- Ved spejle en figur to gange efter hinanden i linjer, der skærer hinanden, får man en drejning af figuren omkring linjernes skæringspunkt. Drejningsvinklen er den dobbelte af vinklen mellem linjerne.

- Ved spejle en figur tre gange efter hinanden i linjer får man,
  hvis de tre linjer er parallelle eller skærer hinanden i et punkt, en enkeltspejling.
  hvis linjerne ligger helt tilfældigt, en såkaldt glidespejling.

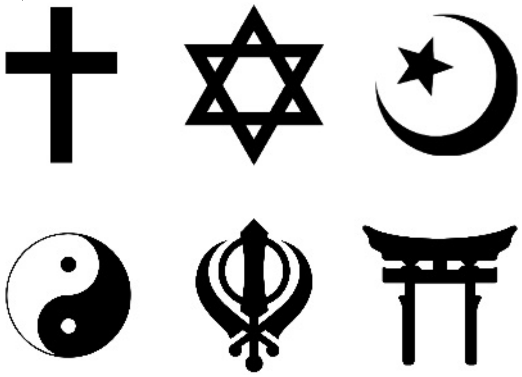
2. I "opdagelsen" af, at vinkelsummen i enhver trekant er 180 grader, kunne vi tegne en trekant og bede programmet udregne vinkelsummen, hvorefter vi kunne lave tusindvis af andre trekanter ved at flytte rundt på hjørnerne i den første og samtidig observere, at vinkelsummen hele tiden var 180 grader.

På begge de centrale punkter står vi uden hjælp, når det drejer sig om Leonardos sætning. Vi kan ikke bare trække i en vilkårlig figur for at få dannet et repræsentativt udsnit af tusindvis af figurer[1], og vi har ikke en applikation i programmet, der kan udregne symmetrigruppen for en given figur.

[1] og i det omfang vi kan, som fx ved at rive i hjørnet i et kvadrat, bliver de nye figurer vi får lavet som oftest usymmetriske og derfor uinteressante i vor nye sammenhæng.

Øvelse 3

1)

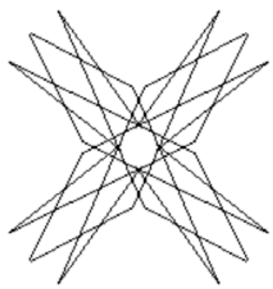


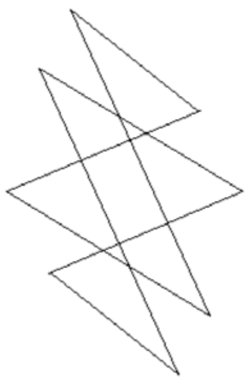
D_1	D_6	D_1
C_1	D_1	D_1

Idet vi observerer, at stjernen i sig selv har større symmetri, nemlig D_5. Det taoistiske symbol har en drejning på 180 grader, så selv om farverne ikke kommer på plads, kan man med god ret sige, at symmetrigruppen er C_2.

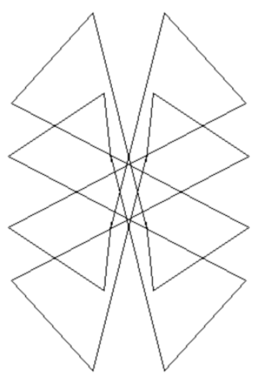
2) Læseren skal selv eksperimentere her, så vi har lavet to fejl i de følgende figurer.

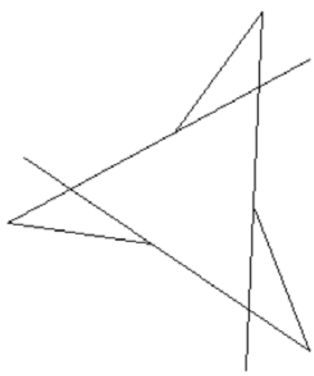
C_4 C_2





D_2 D_3

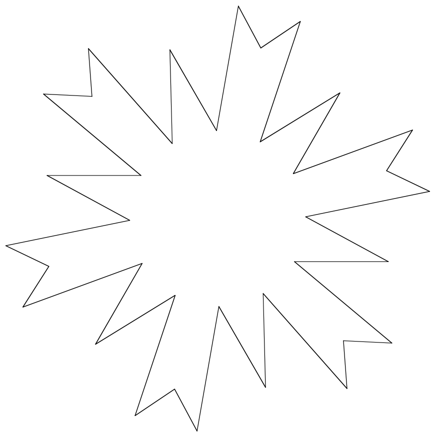




Se eventuelt http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/

Her kan du bare trykke på den ønskede symmetrigruppe og få god teknisk støtte til at lave egne rosetter.

D_{12}



Kapitel 12 Problemløsnings- og ræsonnementskompetence

Øvelse 4

Da gitterpunkterne på trekantpapir fire og fire sidder sammen i romber, og hele papiret faktisk kan ses som en projektion af kvadratisk papir og altså også et sømbræt, må der gælde akkurat samme formel som i Picks teorem, bortset eventuelt fra en faktor der skyldes forskelligt areal af den grundlæggende enhed.

Men hvis vi siger, at den grundlæggende rombe i trekantpapiret får areal lig 1, så gælder Picks teorem uændret også for trekantpapir.

I det hele taget er Picks teorem invariant over for parallelprojektion, så der vil – bortset fra en konstant faktor, der har at gøre med arealenheden – gælde et Picks teorem på alt papir, der bygges op af kongruente parallelogrammer.

Øvelse 5

Det er nok problemløsningsstrategi 3, der er den mest oplagte at gå i gang med. For den enkleste lignende situation er en enkelt linje, der klart deler papiret i to områder.

Tegner vi nu en ny linje, der skærer den første, får vi fire områder.

En tredje linje, der skærer begge de to første i forskellige punkter, må bidrage med yderligere tre områder, så vi nu når op på 7.

Således kan vi fortsætte, og hvis vi har fundet svaret for 9 linjer, så kan vi overveje, hvor meget den tiende linje vil tilføre af yderligere områder:

Forestil dig at du kommer langt udefra ad linje 10, indtil du første gang møder en af de 9 linjer. I samme øjeblik vil du have afsnøret et vinkelformet område ud mod uendelig.

Og når du møder den næste linje vil du igen have afsnøret et område begrænset af første linje, linjestykket fra første til anden linje og endelig turen ud af anden linje.

Snart indser du at den tiende linje således bidrager med 10 nye områder, idet du også får et sidste og tiende med, når du forlader den sidste linjeskæring.

Tænkes det hele igennem ser du, at den første linje gav to områder, men derefter giver den n'te linje n nye områder, og så har du løst ikke blot det oprindelige problem med 10 linjer, der giver 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10, men også ethvert lignende problem. Selvfølgelig kunne det være rart her at have en simpel formel for $1 + 2 + 3 + \ldots + n$, men det bliver så en ny problemstilling at løse.

Øvelse 9

Det er $A_T = ½R_T + I_T – 1$, som vi søger at bevise.

Kaldes antallet af søm som elastikken mellem P og Q rører ved for c, så kan vi bestemme antallet af randsøm på vores trekant som $a + b + c + 1$. Vi har altså $R_T = a + b + c + 1$. Da vi i rektanglet havde $R = 2a + 2b$, og vi nu har $2R_T = 2a + 2b + 2c + 2$, får vi $R= 2R_T – 2c – 2$.

Antallet af de indre søm I i rektanglet er (det dobbelte af de indre søm i trekanten T) + c, altså
$I = 2I_T + c$.

Endelig har vi, at arealet af trekanten er det halve af rektanglets areal $A_T = ½A$ eller $A=2\,A_T$.

Vi sætter nu de tre formler, vi har fundet $R = 2R_T – 2c –2$, $I= 2I_T +c$ og $A=2A_T$, ind i Picks formel for rektanglet, som vi jo har bevist i sætning 1: $A = ½R + I – 1$.

Nu håber vi blot, at Picks formel for trekanten kommer ud i den anden ende. Vi prøver:

$A = ½R + I – 1$ bliver ved de tre indsættelser ensbetydende med

$2A_T =½(2R_T – 2c – 2) +(2I_T + c) – 1$ som er ensbetydende med

$2A_T = (R_T – c – 1) + (2I_T + c) – 1$som er ensbetydende med

$2A_T = R_T + 2I_T – 2$eller

$A_T= ½R_T + I_T – 1$, hvilket skulle bevises.

Øvelse 10

Tegn selv en vilkårlig skæv trekant T på et sømbræt og omskriv den tæt med et akseparallelt rektangel R, hvilket i den generelle situation betyder, at R kommer til at bestå af T samt tre akseparallelle retvinklede trekanter 1, 2 og 3.

Picks teorem for rektanglet har vi bevist, og det lyder $A= ½R+ I – 1$.

Men vi har også vist Picks teorem for de tre akseparallelle trekanter 1,2 og 3, og de hedder med indlysende notation:

$A_1= ½R_1 + I_1– 1$

$A_2= ½R_2 + I_2– 1$

$A_3= ½R_3 + I_3– 1$

Vi ønsker så på snedig vis herfra at argumentere for den formel, vi er ved at bevise:

$A_T = ½R_T + I_T – 1$

Ved betragtning af vores figur ser vi, at hele arealet A består af de fire trekanters areal, altså at

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_T$ eller $A_T = A – (A_1 + A_2 + A_3)$.

Erstatter vi nu med højresiderne i alle vores formler, får vi:

$A_T = A – (A_1 + A_2 + A_3) = (½R + I – 1) – (½R_1 + I_1 – 1 + ½R_2 + I_2 – 1 + ½R_3 + I_3 – 1) =$

$½(R– R_1 – R_2 – R_3) +(I – I_1 – I_2 – I_3) + 2$

Vi har altså ved ren talmanipulation uden megen geometrisk omtanke nu opnået at vise

(1) $A_T = ½(R – R_1 – R_2 – R_3) +(I – I_1 – I_2 – I_3) + 2$

Vi må så håbe, at vi med nogle geometriske overvejelser kan nå frem til, at højresiden bliver $½R_T + I_T – 1$.

Her bliver der ligesom i øvelse 3 nogle mellemregninger, der skal holde øje med de indre søm i rektanglet, som kommer til at blive randsøm på trekant T's sider. Lad os sige, at der er hhv.c_1, c_2 og c_3 sådanne indre rektangelsøm, som ligger på de indre sider af hhv. trekant 1, 2 og 3 (hvilke tre sider tilsammen også bliver T's sider).

Så bliver det samlede antal indre søm I i rektanglet lig summen af de indre søm i de fire trekanter, der udgør rektanglet plus $c_1 + c_2 + c_3$, formelt opskrevet $I = I_T + I_1 + I_2 + I_3+ c_1 + c_2 + c_3$, eller mere interessant for os:

$I – I_1 – I_2 – I_3= I_T + c_1+ c_2 + c_3$, der også kan skrives $I – I_1 – I_2 – I_3 = I_T + R_T – 3$, idet $R_T = c_1+ c_2 + c_3+3$. Vi har altså:

(2) $I – I_1 – I_2 – I_3 = I_T + R_T– 3$

Det ligger lige for at skulle indsætte (2) i (1), men først vil vi lige gøre det samme med randsømmene. Hvis vi lægger alle randsømmene i de tre trekanter 1,2 og 3 sammen, får vi langt flere randsøm end i rektanglet, idet vi får sømmene $c_1+ c_2 + c_3$med. Hvis vi fintæller, hvor tit vi får hjørnesømmene i trekant T med, får vi faktisk

$R_1 + R_2 +R_3=R + c_1+ c_2 + c_3+3= R + R_T$, idet $R_T = c_1+ c_2 + c_3 + 3$.

Dette betyder, at

(3) $(R – R_1 – R_2 – R_3)= – R_T$.

Nu er alt klart til, at vi kan indsætte (2) og (3) i (1), hvilket giver:

$A_T = – ½R_T + I_T + R_T – 3+2$, hvilket er ensbetydende med

$A_T = ½ R_T + I_T – 1$, hvilket skulle vises.

Læseren kan finde argumentet langt, men det er af den slags, det er muligt at pusle sig frem til med lidt hjælp, hvis man har tid nok og lyst.

Øvelse 15

Hvis vi følger hintet i øvelse 15 ser vi altså på et par trekanter som på figur 11 på side 204 i lærebogen. Vi lader *B'* være midtpunktet af siden *AB* og vi lader vinklen ved *B'* være lige så stor som vinkel *B*.

Da vinklen oppe ved *A* = *A'* er den samme i de to trekanter *ABC* og *A'B'C'* og vinkelsummen i enhver trekant er 180 grader, må også den sidste vinkel i de to trekanter *C'* og *C* være lige store. De to trekanter er altså ensvinklede og har dermed et konstant forhold mellem deres sider.

Men vi har netop lavet det så forholdet mellem *A'B'*og *AB* er 1:2. Derfor er forholdet mellem *A'C'* og *AC* også 1:2, og dermed er *A'C'* altså en midtpunktstransversal.

Da vinkel *B'* er lig med vinkel *B*, er midtpunkttransversalen parallel med grundlinjen *BC* og forholdet mellem dem er det samme som for de øvrige sider nemlig 1:2, så midtpunktstransversalen er altså halv så stor som grundlinjen.

Øvelse 16

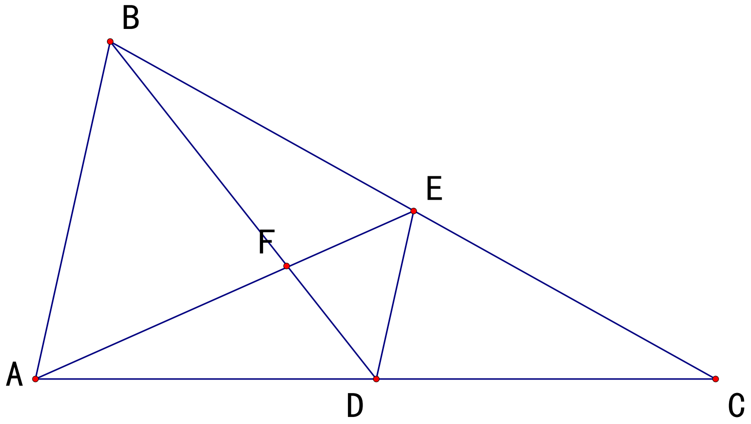
Tegner vi *AC* ser vi, at *PQ* er midtpunktstransversal i trekant *ABC* og derfor parallel med *AC*.

Samme argument kan vi lave i den nedadhængende trekant *ADC*, hvor vi så får, at *SR* er parallel med *AC*. Men to linjer, der er parallelle med samme tredje, er indbyrdes parallelle: *PQ* er altså parallel med *SR*.

Trækkes diagonalen *BD*, kan vi udføre akkurat samme argument på de to nye trekanter der hermed opstår og få at *PS* er parallel med *QR*. Vi har alt i alt bevist, at *PSRQ* er et parallelogram.

Man kan hurtigt se, at *PSRQ* kun ved et tilfælde ligner et rektangel på vores figur. Tegner man hele konstruktionen i et dynamisk geometriprogram, ser man, at så snart man trækker fx *D* til venstre, så ophører vinklerne i *PSRQ* med at være rette.

Øvelse 17



Lad *AE* og *BD* være medianer som skærer hinanden i *F*. Da *DE* er en midtpunktestransversal er den ifølge øvelse 15 parallel med og halvt så stor som *AB*. Hermed bliver $\angle EDB$ og $\angle ABD$ ensliggende vinkler ved parallelle linjer og er derfor lige store, ligesom $\angle EAB$ og $\angle AED$ er det.

Da ydermere der ligger to ens topvinkler ved *F*, får vi, at trekant *FED* og *FAB* er ensvinklede og dermed har samme forhold 1:2 mellem alle sider som der er mellem siderne *ED* og *AB*. Hermed er vist, at skæringspunktet *F* deler medianerne i forholdet 1:2.

Hvis vi erstattede medianen *AE* med medianen fra *C* ned på siden *c*, så må denne tredje median også gå gennem *F*, for vi har netop vist, at to medianer skærer hinanden i forholdet 1:2, og de kan kun ske ved at gå gennem *F*.

Som et sideresultat får vi således, at de tre medianer skærer hinanden i et og samme punkt, der i øvrigt er tyngdepunktet for trekant *ABC*, hvis den laves i pap eller et andet homogent materiale.

Kapitel 13 Konkrete og virtuelle manipulative materialer

Ingen løsningsforslag