14
HVAD ER MATEMATIK?

"Gud har skabt de hele tal, alt andet er menneskeværk"
Leopold Kronecker, ca. 1880.

I 1675 blev der indført en 'eksamen philosophicum' ved Københavns Universitet. I 1971 blev denne filosofiske prøve reelt afskaffet, men dukkede så op igen i starten af dette årtusinde som 'Fagets videnskabsteori', der er obligatorisk på alle længerevarende videregående uddannelser. Det skal støtte den faglige undervisning i et givet universitetsfag ved at behandle fagets filosofi og historie og dets sociale, kulturelle og etiske situation. Det gælder også for matematikfaget.

På læreruddannelsen er der ikke en tilsvarende lang tradition for at arbejde med matematikkens videnskabsteori og -historie. For at råde bod herpå, har vi i ϒ-bogen behandlet tallenes historiske udvikling grundigt, og vi præsenterede faget logik, et af hovedområderne fra det gamle filosofikum, fordi det var vigtigt for vores gennemgang af argumentation og bevis i matematik.

Her i δ-bogen har vi gennem eksempler belyst videnskabelig metode i fagdidaktikken, og vi har lagt vægt på at præsentere matematik og matematikundervisning i en historisk, kulturel og social sammenhæng. De studerende vil møde flere aspekter i bøgerne ε og ω.

Der er dog to store videnskabsteoretiske spørgsmål, som vi endnu ikke har behandlet, nemlig spørgsmålene *Hvad er matematik* og *Hvor kommer matematisk viden fra?* Selv om udgangspunktet er filosofisk sker udredningen med særligt henblik på at kunne fremhæve og reflektere over spørgsmål, der naturligt ville kunne optræde i forbindelse med undervisning i skolefaget matematik. Det er således hensigten, at læseren ved at arbejde med kapitlet:

- Får kendskab til forskellige grundlæggende syn på matematik og derved kan kvalificere sine svar på spørgsmålet om matematiske objekters mulige eksistens.

- Udvikler sin forståelse af, hvordan matematiske resultater udvikles.

- Kan relatere egne og andres undervisningsmæssige visioner til syn på matematikfaget.

ÉR MATEMATIK?

En af de grundlæggende sætninger i talteori stammer tilbage fra Euklids bog Elementer og lyder i moderne sprog: *Der findes uendeligt mange primtal.* Da vi har bevist sætningen i Y-bogen, vil vi ikke her gå nærmere ind på det faglige indhold. Men vi vil i stedet fokusere på ordet 'findes'. Slår man ordet op i Ordbog over det danske Sprog (bind IV, sp. 992), får man oplyst, at ordet betyder 'være til, eksistere'.

Så sætningen udtrykker, at der 'eksisterer' eller 'er til' uendeligt mange primtal. Hvis vi tager dette bogstaveligt, så kan vi hurtigt løbe ind i forskellige filosofiske problemer. Hvis fx disse tal er til i en eller anden form, der fylder noget, så kan man stille følgende lille regneopgave:

Antag, at ethvert primtal fylder lige så meget som et knappenålshoved, hvor meget fylder så alle primtallene tilsammen?

Ja, det kræver ikke det store kendskab til Chr. Hansens Regnebog at beregne, at primtallene vil udfylde hele vores store, men dog endelige univers, og mere til. Så meningen kan nok ikke være, at de eksisterer som noget materielt med vægt og rumfang.

Men selv om vi siger, at de er vægtløse og slet ikke fylder noget, så er der endnu et problem med, at de 'er til'. Vi har jo selv prøvet at 'blive til', og vi kender tidspunktet i historien, nemlig vores fødselsdag. Så vi kunne spørge om, hvornår et primtal som 101 blev til? Kom det til verden senere end primtallet 3?

Hvis det bare tager en milliontedel sekund for hvert primtal at komme til verden, så kan de ifølge de nyeste teorier for vores verdensrum, hvor der skete et ‘big bang’ for ca. 13 milliarder år siden, ikke alle være kommet til verden endnu. Tager vi dette bogstaveligt, så findes der endnu ikke uendeligt mange primtal, men hvis produktionen startede samtidig med universets fødsel, så findes der nu ca. 410.000.000.000.000.000.000.000 primtal, hvilket ikke er uendeligt mange.

Så disse primtal er altså ikke til på nogen måde, der ligner de andre ting i verden, som er til. Så hvad mente Euklid med, at der findes uendeligt mange primtal? Går man til originalværket, så vil man opdage, at Euklid udtrykte sig med forsigtighed og visdom. Sætningen lyder nemlig hos ham:

> “Der er flere primtal end i en hvilken som helst forelagt mængde primtal.”

Og ser man i Euklids bevis, vil man se, at han går konstruktivt til værks. Han påviser faktisk, hvordan man ud af en given mængde primtal frembringer et nyt og anderledes primtal.

Oplæg 1

Find Euklids originale bevis[1], og overvej i hvilket omfang, det er konstruktivt. Frembringer Euklid faktisk et nyt primtal, hvis fx han i udgangspunktet kun har de tre primtal 2, 3 og 5, eller de tre primtal 3, 5 og 11?

Allerede med dette indledende eksempel får vi markeret to af de grundlæggende retninger i matematikkens ontologi, dvs. i den del af matematikkens filosofi, der arbejder med spørgsmålet om matematikkens eksistens[2]. Den ene retning fastholder, at matematikkens genstande på en eller anden måde er til, at de eksisterer. For den er faget et katalog over noget, der eksisterede, før nogen tænkte på matematik. Den anden retning hævder, at matematikkens genstande ikke eksisterede, før nogen har lavet dem, konstrueret dem. For den er matematikken nogle opskrifter på konstruktioner.

1 Vores bevis i ϒ-bogen (s. 593) er ret tro mod originalens idé, men ellers findes originalen i engelsk oversættelse ved at søge på nettet efter “Elements Book IX proposition 20”.

2 Ontologi er generelt den del af filosofien, der drejer sig om de måder, hvorpå noget kan være til.

Det er klart, at det også i skolen er afgørende, om eleverne får den ene eller den anden opfattelse af, hvad matematik er. Det kan betyde meget for deres holdning til faget og deres motivation for at arbejdet med det. Dermed bliver også lærerens syn på faget vigtigt, for det kommer til at præge undervisningen.

Vi vil derfor i det følgende afsnit se lidt nærmere på, hvilke svar forskellige filosofiske skoledannelser har givet på spørgsmålet '*er* matematik?'

PLATONS SVAR: EKSISTENS I EN IDÉVERDEN

Platon (428-348 f.v.t.) skrev omkring 360 f.v.t. værket 'Staten', hvori han blandt meget andet giver en illustration af, hvordan noget kan eksistere. Det er en ganske anden form for eksistens end den, vi i det foregående afsnit prøvede at veje og regne på. Platon brugte en metafor, i form af en lignelse om en hule, til at forklare den grundlæggende idé:

> "Forestil dig nogle mennesker i en slags underjordisk rum, ligesom en hule, hvis indgang, som er lang og lige så bred som hulen, åbner sig mod lyset. I dette rum har de opholdt sig lige fra barndommen, fastbundne både på benene og om halsen, så de må blive på stedet og kun kan se fremad, da båndene hindrer dem i at dreje hovedet, og ovenover dem i nogen afstand brænder der en lysende ild bag deres ryg, og mellem ilden og fangerne, altså lidt højere oppe end dem, går der en vej, langs med hvilken du må forestille dig at der er opført en vold, ligesom de folk, der giver marionetforestillinger, foran publikum har indrettet sig en forhøjning på hvilken de fremfører deres figurer." (Platon 1975, s. 264)

På denne vold føres alle slags figurer frem svarende til de virkelige idéer i Platons filosofi. Idéerne er det egentlige og evige i verden, og de ligger til grund for det, vi sanser. Men de fastbundne mennesker kan kun se den skygge af idéerne, som bliver kastet på hulens bagvæg, og da de aldrig har set andet, vil de tro, at skyggerne er virkeligheden.

Sådan er det også med de fleste mennesker i verden. De ser kun de sanselige ting, der er at betragte som skygger af de virkelige sande idéer. De få udvalgte, der har set de virkelige idéer, er filosofferne, men andre kan lære at vende hovedet den rette vej gennem veltilrettelagt undervisning. Det første og vigtigste trin i denne undervisning er matematik med hovedvægt på geometri. Netop i matematikken er der ikke så langt fra de konkrete tal og tegnede geometriske figurer til de ideale tal og figurer i idéverdenen.

Det, at de matematiske idéer er til stede på forhånd, muliggør en særlig pædagogik i matematikundervisningen. I dialogen 'Menon' viser Platon, hvorledes Sokrates med sin 'jordemodermetode' kan få en slave til på egen hånd at opdage matematiske idéer – eller måske mere i Platons ånd: generindre dem. Slaven skal prøve at konstruere et kvadrat med dobbelt så stort areal som et på forhånd tegnet kvadrat. Det lykkes, og tilskuerne må give Sokrates ret i, at han på intet tidspunkt fortalte slaven noget. Sokrates havde kun været jordemoder ved fødslen af en idé. Slaven kunne selv finde vej til den idéverden, hvor svaret altid har ligget, blot med lidt vejledende spørgsmål fra Sokrates.

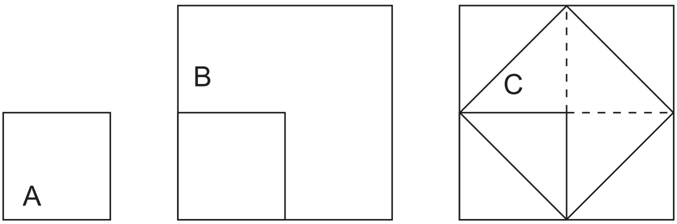
Så når vi sammenholder Staten og Menon ser vi, at svaret på spørgsmålet '*er* matematik' har pædagogiske konsekvenser. Men der er ikke nogen direkte årsagssammenhæng her eller strengt logisk sammenhæng. Selv om man ikke er platoniker i den forstand, at man mener, at matematikken har eksisteret som eviggyldige sandheder siden tidernes morgen i en idéverden, kan man godt se Menon som et af de fineste undervisningsforløb i historien. Den dialogiske metode, som Sokrates behersker så virtuost i dialogen, kan, som vi har set tidligere i denne bog, indgå som en del af lærerens undervisningsmetode i næsten enhver pædagogik.

Konklusionen på selve ontologien i denne historie er altså, at det lykkedes for Platon at beskrive en idéverden, hvor ting som matematikkens tal kunne eksistere uden på nogen måde at kollidere med den virkelige verdens ting, og de regneopgaver vi kan finde på om dem. Vi kalder positionen for platonisk realisme, fordi positionen hævder, at begreberne reelt er til, eksisterer. Den kaldes forvirrende nok også for idealisme, fordi det er idéerne, der tæller i denne verden, hvor alt, vi har om os i hverdagen, blot er skygger og måske bedrag.

Oplæg 2

Prøv med to studerende fra holdet at genopføre Platons dialog Menon ud fra følgende beskrivelse:

I denne del af dialogen er der kun to aktører: Sokrates og slaven. De ser på et kvadrat *A,* som Sokrates har tegnet i sandet. Sokrates beder slaven tegne et, der er dobbelt så stort, og slaven tegner *B*. Gennem dialog bliver de enige om, at den nok nærmere er fire gange så stor. På vejen frem mod en brugbar løsning tegner Sokrates kvadratet *C* og gennem dialog 'generindrer' slaven, at *C* er den rigtige løsning.



Figur 1.

Sokrates spørger til sidst tilhørerne (resten af holdet), om han på noget tidspunkt har fortalt slaven noget. Nej, det synes de ikke.

Se evt. i originalen[3] om jeres dramatisering svarede til virkeligheden for to et halvt tusinde år siden.

I ca. 2000 år har Platons idéer om matematikken som noget meget reelt eksisterende – en dybere sandhed bag den sanselige overflade – domineret i vestlig tankegang. Dømt med eftertidens øjne havde filosofien måske nogle uheldige konsekvenser. Den har, kombineret med den helt enestående kanoniske rolle Euklids Elementer fik, bidraget til i 2000 år at fastholde matematikken i nogle snævre rammer, hvor fx Elementerne kom til at stå som noget urørligt, noget der ikke kunne gøres anderledes. Ræsonnementet er meget klart: Hvis der findes en evig idéverden, og hvis Euklids bog beskri-

3 Der er en engelsk udgave på http://www.gutenberg.org/etext/1643 (lokaliseret august 2007).

ver denne idéverdens matematiske indhold, hvorfor så bekymre sig om at udvikle mere matematik eller rokke ved det som var udviklet.

Men der var også politiske konsekvenser, som Platon allerede selv drog i sin bog Staten. Når nu sandheden, ikke blot om matematikken, men også om det gode, skønne og retfærdige ligger derude i idéverdenen – hvorfor så ikke lade de få, der kan få øje på den, styre land og rige. Denne filosofi begrunder altså et elitært fåmandsvælde eller et oplyst enevælde.

Figur 2. Hovedindgangen til Kazan Universitet som et apropos til eksistensen af Lobachevskys geometrier. Som rektor for universitetet 1829-46 faldt det i hans lod at bygge denne nye bygning. Han designede selv søjlerne ved indgangen, der i al fald eksisterer, som det fremgår af dette private foto fra oktober 2007.

I nyere tid (1800-tallet) kom demokratiet som styreform på dagsordenen omkring samme tid, som Lobachevsky med flere opfandt en ikke-euklidisk geometri (Y-bogen, s. 565). Så måske er der tale om mere end en tilfældighed, hvis vi forbinder euklidisk geometri med enevælde. Med

Euklids og Platons fald blev matematikken i al fald friere og blomstrede med nye idéer. Den tidligere præsident for Mathematical Association of America, Eric Temple Bell, hyldede i hundredåret for den ikke-euklidiske geometri Lobachevski som 'den store befrier': "Manden der befriede den menneskelige fornuft for de kæder, som Platon og Euklid smedede i den såkaldte gyldne tid"[4].

Det er måske lidt uretfærdigt, at Euklid således sammentænkes med Platon, for vi ved intet om Euklid som person eller for den sags skyld som filosof. Som vi har set, var hans formulering af "der findes uendeligt mange primtal" meget forsigtig og tydede sådan set ikke på, at han var nogen særlig ivrig platoniker. I det hele taget er det påfaldende, som han interesserede sig for geometriske konstruktioner, og uden det praktiske formål vi i dag har med tegninger og konstruktioner.

Det platoniske syn på matematik kunne i pædagogisk henseende føre til, at matematikken nogle steder fik en særlig ophøjet rolle i skolen og til i særlig grad at være hævet over kritik. Matematiklæreren kunne få rollen som den, der altid havde svar på alt, fordi han havde lært det, der var at lære i matematik, fx ved at beherske Euklids Elementer.

HISTORISKE EKSEMPLER PÅ KONSTRUKTION

Vi har i kapitlet om tallenes historie i Υ-bogen set, at der gik omkring 2000 år fra grækernes geometriske regning, til der i den europæiske tradition for alvor blev fundet nye tal. Det stemmer godt med forestillingen om den platoniske dominans i den europæiske matematik, at de nye tal syntes at opstå i Kina (negative tal) og Indien (nullet).

Men da der først kom gang i udviklingen i Europa, blev helt nye tal udviklet næsten samtidig, nemlig de negative og de komplekse. Vi skal ikke her gentage historien, men blot erindre om, at da Geronimo Cardano (1501-76) fandt løsninger til ligninger som $x + 4 = 1$, så kaldte han løsningen, som vi benævner $x = -3$, for en *fiktiv* løsning. Det er klart, at han tænkte på -3 som et opdigtet tal, en menneskelig konstruktion og ikke noget, der altid havde eksisteret i en evig platonisk idéverden.

4 Greenberg, Marvin Jay (1993). *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*. 3. udgave. New York: W. H. Freeman and Co., s. 184.

Det var også Cardano, der i 1545 i sit værk Ars Magna vovede at foreslå andre former for fiktive tal, når han fik brug for dem til ligningsløsning. Vi har andetsteds (ϒ-bogen, s. 193) nævnt opgaven:

Del 10 i to dele, hvis produkt er 40.

Cardano foreslår løsningerne $5+\sqrt{-15}$ og $5-\sqrt{-15}$, og han viser, at de passer, hvis man benytter de sædvanlige regneregler herunder reglen, at $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$, men nu også for negative værdier af x. Cardano skrev selv om disse løsninger, at de var "lige så udspekulerede som de var nytteløse". Til vores brug observerer vi, at han klart tænker på disse nye tal som menneskelige konstruktioner, der ikke kommer fra en evig idéverden. Det blev da også snart almindeligt at kalde tal som $\sqrt{-15}$ for et imaginært tal, noget som kun er en forestilling og altså noget, der ikke tillægges eksistens. I dag er den internationale norm mere neutral, idet tal som $5+\sqrt{-15}$ kaldes for et komplekst tal.

Det er klart i den historiske sammenhæng, at oplevelsen var, at disse nye tal blev konstrueret eller med et andet ord, opfundet. For matematikere der arbejdede gennem et menneskeliv med disse tal opstod der en klar fornemmelse af at være på opdagelse i et nyt univers. Det blev straks vanskeligere sidenhen, da man opdagede, hvor nyttige disse tal var, og hvor smukke matematiske sammenhænge, der fandtes i dem.

Det varede således ikke længe, før man kunne vise, at de komplekse tal var afrundingen af hele talopbygningen, således at de – med operationerne addition og multiplikation – var det eneste såkaldte tallegeme (se ϒ-bogen, s. 337) indeholdende de naturlige tal, hvor det også var muligt at løse alle de klassiske ligningstyper. Hvis man altså starter med de naturlige tal og udvider med de negative tal for at kunne løse ligninger som $x + 4 = 1$ og dernæst med de rationale tal for at kunne løse $3x = 4$, så med de reelle for at klare $x^2 = 3$ og endelig med de komplekse for at klare $x^2 = -3$, så kunne slutresultatet ikke være blevet et andet, end det blev. Hvis der findes mennesker på en planet i Andromedagalaksen, der allerede for millioner af år siden har haft en kultur, der langt overgår vores, så ville de ikke kunne have fundet en anden løsning på problemet, end den Cardano fandt midt i 1500-tallet. Jo, de ville sikkert have haft andre talsymboler og andre tegn for regneoperationerne, men i matematisk forstand ville deres svar på problemet med at få løsning til alle ligninger have været identisk med vores.

Det er sådanne overvejelser, der også i nutiden kan friste en matematiker til – måske ikke filosofisk, men så emotionelt – at tage en platonisk tilgang til matematikkens objekter. Der er noget stærkt motiverende i at gå på opdagelse i en verden, som man oplever som ægte eksisterende frem for blot en fantasiverden.

På den anden side kan der også være noget motiverende ved at tænke på matematik som et felt, hvor der er frit slag for nye konstruktioner og opfindelser – altså plads til at digte nye historier. Vi vil nu se på et par af de matematikfilosofiske skoler, der dyrkede sådanne opfattelser.

INTUITIONISMEN, EN KONSTRUKTIVISTISK MATEMATIKOPFATTELSE

Vi indledte dette kapitel med et citat fra 1880: "Gud skabte de naturlige tal. Resten er menneskeværk." Der er næppe tale om et religiøst udsagn, men en påstand om, at matematikken fra et vist elementært niveau og fremefter er menneskeværk. Udsagnet passede godt med tiden sidst i 1800-tallet. Man havde da netop fået styr på at opbygge de reelle tal fra brøkerne, og disse havde man længe kunnet opbygge præcist ud fra de naturlige tal, ligesom man længe havde kunnet konstruere de komplekse tal, så snart man blot havde de reelle tal til rådighed.

I 1889 gjorde Peano på sin vis Gud overflødig, idet han byggede de naturlige tal op – ikke ud fra naturens genstande – men som vi et par steder[5] har skitseret på nogle aksiomer, der tillod konstruktion af alle de naturlige tal, og som var stærke nok til at levere beviser for alle de kendte sætninger om naturlige tal. Men det var noget af et postulat, at der fandtes tal, som tilfredsstillede Peanos aksiomer[6]. Man kunne simpelthen ikke vide det med sikkerhed. Der var da to veje at gå. Enten kunne man påstå, at der var noget særligt indlysende sandt ved de naturlige tal, eller også kunne man sige, at det var nu en gang de spilleregler, man ville lave matematik efter. Det gav

5 ϒ-bogen, s. 203 og ε-bogen, se stikordsregister.

6 Skeptiske læsere vil måske her ryste på hovedet og sige: Man kunne da slå op i enhver regnebog i 1. klasse i skolen og se, at tallene fandtes. Og argumentet kan ikke sådan affejes, men det forslår dog kun til en endelig mængde som 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. Peanos aksiomer hævder, at der findes en uendelig mængde med visse egenskaber, og den er aldrig vist frem i nogen skolebog og bliver det heller aldrig.

anledning til to matematikfilosofiske retninger omkring 1900: intuitionismen og formalismen. Vi behandler intuitionismen i dette underafsnit og formalismen i det næste.

Den hollandske matematiker L. E. J. Brouwer (1881-1966) blev grundlægger af den intuitionistiske filosofi[7]. Hovedtanken i intuitionisme er at tage de naturlige tal for intuitivt givne. De er altså hverken givet af Gud eller af naturen, men mennesket har en slags intuitiv indsigt i disse tals natur og eksistens (se lidt senere, hvordan Kant måske har inspireret til den tanke).

Dernæst burde alle andre resultater og objekter i matematikken direkte konstrueres på grundlag af de naturlige tal. Det vil blandt andet sige, at eksistensbeviser ikke havde større interesse, for de beviser blot, at noget 'eksisterer', hvad så det vil sige. Intuitionisterne ville ikke godtage, at noget eksisterede, uden at det var konstrueret først.

Det betyder, at hele det program med at konstruere tallene ud fra de naturlige tal, som var sket i løbet af 1800-tallet faldt godt i intuitionisternes smag. Derimod kunne de ikke lide eksistensbeviser som det, der plejede at blive givet for den såkaldte middelværdisætning (Υ-bogen, s. 48), altså den sætning der siger, at en kontinuert funktion f, der starter under x-aksen og ender over den, undervejs må have krydset x-aksen, altså, der må findes et x, så $f(x)=0$. Intuitionisterne ville her kræve en algoritme, der fortalte, hvordan man mere præcist kunne konstruere denne formodede løsning til $f(x)=0$.

De fleste matematikere synes, at intuitionisterne gjorde matematikerens arbejde for kompliceret ved deres afstandtagen fra eksistensbeviser. Men hvad der især forekom næsten som selvpineri, var deres afstandtagen fra indirekte beviser. For intuitionisterne var problemet med et indirekte bevis indlysende. Det indirekte bevis (Υ-bogen, s. 588-597) beviser en påstand ved at påvise, at en benægtelse af påstanden vil føre til en modstrid. Men det er jo ikke en konstruktion af det, påstanden drejer sig om. Så et indirekte bevis vil altid være ikke-konstruktivt og derfor ifølge intuitionisterne slet ikke et bevis.

7 Intuitionisme kaldes også for konstruktivisme, men da det ord bruges i en del andre sammenhænge i matematikdidaktikken vil vi undlade at bruge det her, hvor meningen er noget afvigende og faktisk på visse punkter i modstrid med radikal konstruktivisme.

Man kan også sige det på den måde, at intuitionisterne ikke ville godtage et urgammelt princip i logikken: Det udelukkede tredjes princip, det princip der hævder, at en påstand er enten sand eller falsk, en tredje mulighed findes ikke.

Så det er ikke så underligt, at Brouwer løb ind i en del modstand og skuffelse med sit intuitionistiske projekt. Men med al denne filosofis besværlighed har den muligvis et sikrere fundament end de formalistiske retninger.

FORMALISME

I starten af 1800-tallet blev man opmærksom på, at der kunne være andre geometrier end den, Euklid havde beskrevet. Det viste sig, at disse geometrier især afveg fra hinanden i svaret på et bestemt spørgsmål: *Hvis man har givet en linje og et punkt uden for linjen, hvor mange linjer parallelle med den givne findes der da gennem dette punkt.* Hos Euklid var svaret 'netop én'. Ja det havde endda været en del af det grundlag, han byggede sin geometri på. Men det viste sig nu, at der kunne dannes andre geometrier, hvor svaret var 'mange', og igen andre, hvor svaret var 'ingen'. Så hvilken geometri skulle man foretrække?

Det moderne svar, som de fleste matematikere i dag er tilhængere af, er: De forskellige geometrier er lige gode. Men når man har valgt sit grundlag, sine spilleregler, så må man følge disse regler, dvs. spille det spil, de fastlægger. Eller sagt i matematikersprog, så skal man selvfølgelig være bevidst om, hvilke definitioner og aksiomer man bygger på. Heri er der intet nyt. Det nye var, at man på et tidspunkt begyndte at tillade andre sæt af aksiomer end dem, man havde arvet fra Euklid og andre af matematikkens grundlæggere i oldtiden.

Når vi kalder svaret 'moderne', er det, fordi det går godt i spænd med modernitetens projekt, hvor afvigelser fra traditionen blev tilladt for ikke at sige opmuntret. Der kom et skær af relativisme over de gamle sandheder: Euklid, Bibelen, de danske love samt fx det traditionelle ægteskab var alt sammen godt, men man kunne tænke sig alternativer, der også var gode.

Ifølge formalismen kan et spil som skak således godt betragtes som matematik. Definitionerne kunne tildele de enkelte brikker egenskaber; aksiomerne kunne fastlægge, hvordan en brik slår en anden ud, og hvornår den ene spiller bliver skakmat. At vise, at man kan komme fra en stilling på skakbrættet til en anden, ville således i formalistens øjne kunne betragtes som matematik.

Det var den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943), der gav mønsterløsningen for den nye retning med sit ambitiøse værk *Grundlagen der Geometrie* (1899). Han satte her en ære i at reparere alle skønhedsfejlene i Euklids Elementer. Enhver form for reference til sund fornuft og erfaringer fra naturen blev således udelukket. Netop derfor måtte mængden af aksiomer blive langt større end hos Euklid, for intet kunne tages for givet, som ikke var nedskrevet som et aksiom. Skulle man undgå at bygge på intuition, burde man egentlig kalde geometriens objekter som punkter, linjer og planer for borde, stole og ølkrus. Heldigvis lod han det blive ved snakken, for det er faktisk svært at læse tekster, hvor tingene har navne, der giver helt gale associationer.

Tanken modnede derefter og blev endeligt formuleret som et program i 1920. De centrale punkter i Hilberts program for formalisme var:

1) Alle matematikkens påstande skal bevises ud fra et endeligt antal aksiomer. (Fuldstændighed).

2) Aksiomerne må ikke føre til modstridende resultater. Og der skal kunne argumenteres for, at det ikke vil ske. (Modsigelsesfrihed).

Det var et slag for Hilbert og formalismeprojektet, at Kurt Gödel i 1931 kunne påvise, at det var umuligt at opbygge en matematik omfattende de naturlige tal, således at både kravet om modsigelsesfrihed og fuldstændighed blev opfyldt samtidigt. Resultatet går under navnet Gödels Ufuldstændighedssætning.

Man kunne tro, at Gödel tog modet fra matematikerne, men på grund af kravet om teknologisk fornyelse under Anden Verdenskrig og matematikkens åbenlyse nytte i den forbindelse, kom der en hidtil uset vækst i antallet af matematikere og i produktion af matematik målt som artikler i diverse tidsskrifter.

Den praktiserende matematiker lod sig ikke gå på af Gödels sætning. En tid så det ud til, at Gödels sætning kunne være forklaringen på, at en del tilsyneladende sande sætninger fra matematikken ikke var blevet bevist endnu. Faktisk er nogle af de berømteste sætninger blevet bevist siden da, og de fleste matematikere vil mene, at det ikke er på grund af Gödels sætning, at man har svært ved at bevise berømte sætninger, som man tror, er sande. Goldbachs sætning[8] siger fx, at "ethvert lige tal kan skrives som summen af to primtal". Når det endnu ikke er bevist, så skyldes det næppe det logiske problem, som Gödel har påpeget, men nærmere en mangel på gode idéer til beviser, altså mangel på matematisk fantasi.

Ser vi på formalisme i skolemæssig sammenhæng, så er det interessante nok, at formalismen åbner op for, at så meget kan regnes for matematik, og at vi selv kan gå i gang med at opfinde mere. For set gennem formalismens briller må vi klart kalde matematik for opfindelse og ikke opdagelse.

I bogen *The Mathematical Experience*[9], som hermed anbefales til yderligere studier om emnet, skriver forfatterne: "The working mathematician is a Platonist on weekdays, a formalist on weekends". Ifølge denne kategoriske påstand tror matematikeren således i sit daglige arbejde på en ganske særlig eksistens af den matematiske verden. Kun når han i weekenden taler med andre dødelige, vil han medgive, at det nok mere er en menneskelig opfindelse eller et spil, hvor vi selv laver reglerne.

Eksempel på formalisme: MIU-universet[10]

Dette MIU-univers skal være et eksempel på aksiomer som næsten tilfældige spilleregler. Samtidig er det en eksemplarisk udgave af formel matematik, der ikke er knyttet til de sædvanlige virkeligheder, vi plejer at arbejde med i matematikken: tal og geometri.

Vort univers i denne leg består af alle bogstavstrenge ('ord'), der kan dannes af bogstaverne M, I og U. For eksempel UUMI eller MIUMIUUUIMMMMU.

Vi ser på en mindre del af dette univers, MI-rummet. I første omgang ved vi kun, at ordet MI er med i MI-rummet.

8 Kaldt således efter den preussiske matematiker Christian Goldbach, der som den første formulerede sætningen i 1742. Sætningen er frem til 2007 blevet verificeret for alle lige tal op til en trillion, og sandsynligheden for, at sætningen ikke er sand, er forsvindende lille.

9 Davis, Philip J. & Hersh, Reuben (1983) *The Mathematical Experience*, Harmondsworth: Penguin Books, s. 321.

10 Idéen til dette er hentet hos Douglas R. Hofstadter (1986): Gödel, Escher, Bach: An eternal golden braid, s. 33f.

Desuden er der visse regler/aksiomer for, hvad der yderligere kan regnes med i MI-rummet:

1) Hvis et ord er med i MI-rummet, så er ordet efterfulgt af U også med.
Eks.: Hvis UUMMI er med i MI-rummet så er UUMMIU også med.

2) Hvis x er et ord, og Mx er med i MI-rummet, så er Mxx også med i MI-rummet.
Eks.: Hvis MUUI er med i MI-rummet, så kan vi sætte x = UUI, og regel 2 siger da, at MUUIUUI er med i MI-rummet.

3) Hvis III er en del af et ord, der er med i MI-rummet, så er også det ord, hvor III er erstattet af U med i MI-rummet.
Eks.: Hvis MUIMIIIUM er med i MI-rummet så er MUIMUUM med i MI-rummet. Bemærk, at MIIII kan blive til både MUI og MIU.

4) Hvis UU forekommer i et ord i MI-rummet, så er også ordet, hvor UU fjernes, med i MI-rummet.
Eks.: Hvis IMUUM er med i MI-rummet, så er IMM med i MI rummet.

Der er ikke andet med i MI-rummet end, hvad der følger af reglerne 1-4 samt af det faktum, at MI er med.

Oplæg 3
Frembring 10 forskellige ord, som er med i MI-rummet. Er MUI og MUIIU med i MI-rummet?

Oplæg 4
Er MU med i MI-rummet? Kan du bevise, at det er med? Kan du bevise, at det ikke er med? Som Hofstadter skriver i den forbindelse: "Now you may begin trying to make MU. Don't worry if you don't get it. Just try it out a bit – the main thing is for you to get the flavour of this MU-puzzle. Have fun" (Hofstadter 1986, s. 35). Hofstadter

havde netop til hensigt at sætte læseren på sporet af, om alt sandt kan bevises. Gödels sætning åbner op for den mulighed, at MU er med i MI-rummet, men at vi bare aldrig vil kunne vise det. Det kan dog også være sådan, at vi bare ikke endnu har fundet på et godt argument for, at MU er med, eller for at MU ikke er med.

Oplæg 5

Med den frihed som formalismen giver, kan en hvilken som helst regelstyret symbolbehandling regnes med som matematik. Prøv, om du kan opfinde noget, gerne så det kan bruges i skolen. Selv om formalismen har medregnet vel meget under matematikkens paraply, så skal man i skolemæssig sammenhæng overveje, om det er værdifuldt, altså specielt om det fremmer skolens formål og fagmål. Er der måske spil, der kan komme med i den kategori?

ER MATEMATIK MERE SAND END EN SKAKBOG?

Vi har set på de to yderpunkter i spektret af matematikopfattelser. På den ene side platonismens tro på en helt særlig eksistens af matematikkens begreber og sandheder, som derved får noget absolut over sig. På den anden side formalismen, der ser matematik som et spil underkastet visse regler, kaldet definitioner og aksiomer.

Og så var der intuitionisterne, der syntes, at der dog var noget, der var særligt sandt, nemlig de naturlige tals verden. Den var tilgængelig for vores intuition. De var inspireret af Kants filosofi.

Immanuel Kant (1724-1804) er standardreferencen i filosofihistorien for spørgsmålet, om hvorvidt der er mellempositioner i spektret af sandhed. Han indførte nogle begreber, som alle senere matematikfilosoffer på den ene eller anden måde har måttet forholde sig til og ofte har anvendt i egne overvejelser.

Kant opdeler udsagn (domme) om verden i analytiske og syntetiske. Det er en *analytisk dom*, når jeg hævder at 'min brors søn er min nevø', fordi jeg ved analyse af begrebet 'nevø' kan nå frem til, at det netop kan bruges om 'min brors søn' og 'min søsters søn'. Det er også sådan, det foregår i de fleste matematikbøger på højere niveau. Fx definerede vi i ϒ-bogen, hvad vi ville forstå ved et legeme, og så beviste vi en del resultater vedrørende et legeme. Dette foregik udelukkende ved en analyse af, hvad et legeme var. Vi nåede ikke frem til nogen ny viden om denne verden, som ikke allerede på en måde lå i kim i selve begrebet 'et legeme'. Det var ren analytisk viden, vi nåede frem til.

Så er det noget helt andet med naturvidenskabelig viden. Ved at observere verden får vi noget at vide om den (*syntetisk* viden), der ikke kan fås ved en analyse af de ord, vi bruger – men efter observationen (*a posteori*).

Syntetiske sætninger er altså sætninger, der faktisk siger mere om verden, end man kan nå ved ren analyse af begreberne i sætningen. "Det regner i dag" er således en syntetisk sætning. Det samme er alle andre empiriske sætninger, dvs. dem der bygger på en observation eller anden sanseoplevelse i den ydre virkelighed. Det gælder lige fra *Isbjørnen i Zoologisk fik en unge i foråret 2007* til Ohms lov for elektricitet: $U = R \cdot I$ og hele det øvrige indhold i naturvidenskaberne.

Det store spørgsmål, som Kant stillede sig, var derefter, om der fandtes *syntetisk a priori* viden, altså viden om verden som gælder uafhængigt af og måske endda før vores observation af verden. Ja, det gør der, siger Kant i sin bog om *Kritik der reinen Vernunft* (1781), og det er især den basale matematiske viden om tal og rum, som han opfatter som syntetisk a priori.

Det gælder, at $2 + 2 = 4$. Men det gælder hverken, fordi vi på analytisk vis kan slutte os til 4 ud fra en analyse af betydningen af $2 + 2$, eller fordi vi gennem observationer i denne verden opdager, at $2 + 2$ er 4. Nej, der er en tredje vej til vores viden, at $2 + 2 = 4$, fordi det er en syntetisk a priori dom. Det kan godt være, at en sætning som 'to og to er fire' oprindelig er fremkaldt af en erfaring, men dens sandhed hviler ikke på observation i naturvidenskabelig forstand:

> "Et barn, der lærer at regne, kan hjælpes ved at have to kugler og to kugler til for øje og iagttage, at han i alt ser fire kugler. Men når det har fattet den almindelige sætning: 'to og to er fire', forlanger det ikke mere bekræftelse

ved eksempler. Sætningen har en sikkerhed, som induktion[11] aldrig kan give en almindelig lov. Alle den rene matematiks sætninger er i denne betydning a priori". (Russel 1992, s. 614).

Men hvordan er syntetiske domme a priori mulige, spurgte Kant sig selv? Og han kunne selvfølgelig ikke i fx tilfældet 'to og to er fire' svare, at det fremgår af definitionerne på, hvad 'to', 'fire', 'og' samt 'er' betyder, fordi han netop ikke anser 'to og to er fire' for at være nogen analytisk dom. 'to og to er fire' siger jo noget om verden. Men så kommer hans vigtige skelnen mellem verden i sig selv (Das Ding an Sich) og den verden, som vi oplever. Om verden i sig selv kan vi aldrig sige noget med nogen sikkerhed. Men det kan vi om den af os oplevede verden. For at opleve verden ordner vi sansningerne ved hjælp af vort eget åndelige apparat, og her er Kant specielt interesseret i *anskuelsesformerne,* der populært sagt er de briller, som vi alle er tvunget til at se verden gennem. Derfor kan anskuelsesformerne heller ikke fortælle os noget om verden i sig selv, men kun om den verden vi erkender.

Vi skal ikke her gå ind på dem alle sammen, men blandt anskuelsesformerne findes tid og rum, og disse anskuelsesformer indordner simpelt hen vores sansninger efter tid og rum, og derfor efter den elementære tallære og geometri.

Så der er noget subjektivt i, at 'to og to er fire'. Vi kan egentlig ikke vide, om det er sådan ude i verden i sig selv, men sådan vil det altid være i vores oplevede verden, og det ser ud til at gælde for os alle. Tilsvarende med geometrien: "Sansegenstandene må adlyde geometrien, da geometrien beskæftiger sig med vores måde at sanse på, og derfor kan vi ikke sanse anderledes." (Ibid., s. 620).

Kant tillægger altså matematikken langt mere sandhed end en tilhænger af formalismen ville kunne acceptere. Og Kant har lige siden haft tilhængere, der gik ind for hans erkendelsesteori. De fleste matematikere og filosoffer vil dog mene, at med Hilberts *Grundlagen der Geometrie* i 1899 fik vi endelig en rent analytisk geometri[12], hvor sandheden af sætninger udelukkende fremkom ved analyse af de mange aksiomer og definitioner. Og med den

11 Ved induktion menes her "undersøgelse af mange eksempler".

12 Her menes selvfølgelig ikke den analytiske geometri, der blev opfundet af Descartes, og i dag er præget af *x'er, y'er* og ligninger, men en geometri der var analytisk i Kants forstand.

almene relativitetsteoris gennembrud efter solformørkelsen i 1919, hvor man gennem observation måtte konkludere, at en anden geometri end Euklids syntes bedst til at beskrive vores fysiske univers, fik ikke-euklidiske geometrier en særlig status og sandhedsværdi.

Man kunne sige, at vi efter 1920 på den ene side havde Euklids geometri som en rent analytisk øvelse, der fører frem til alle de klassiske geometriske sætninger ud fra nogle aksiomer, men ikke siger noget om virkeligheden i det store universelle rum. På den anden side har vi en ny geometri, hvis aksiomer fastlægges efter nøje måling i universet, og som derfor siger noget sandt om verden: "Af de to slags geometri er den ene således a priori, men ikke syntetisk, mens den anden er syntetisk, men ikke a priori", skriver det tyvende århundredes store filosof Bertrand Russel i *Vestens Filosofi* (ibid., s. 622), mens han elskværdigt tager livet af Kants filosofi på dette område. Man må give Russel ret så langt, at den euklidiske geometri ikke er sand på en sådan måde, at den svarer til det verdensrum, som vi faktisk observerer, måler på og udvikler teorier om. Det forhindrede ikke den danske filosofiprofessor K. Kroman i endnu i 1920 at fastholde et kantiansk synspunkt og hævde:

> "Ikke-euklidisk geometri er strengt taget en umulighed, fordi vor logik, vor intuition, kort sagt alle de involverede faktorer, er euklidiske." (Hansen 1994, s. 116)

Selv om Bertrand Russel nok havde fat i den lange ende specielt efter solformørkelsen i 1919, hvad kunne så denne førende filosof sætte i stedet? Ikke meget hvis man skal tag hans udbredte citat helt bogstaveligt:

> "Matematikken kan defineres som det fag, hvori man aldrig ved, hvad man taler om, og aldrig ved, om det, man siger, er sandt." (Dictionary of Quotations 1994, s. 328).

Men han viede en del af sit liv tidligt i 1900-tallet til sammen med matematikeren Alfred North Whitehead at skrive *Principia Mathematica* (1. udgave 1910-1913). De stræbte efter, som Hilbert, at skrive en komplet og modsigelsesfri fremstilling af matematikken byggende på et sikkert fundament. Og et sådant fandt de i logikken. De nåede langt og viste, at matematikken kunne bygges på logikken plus noget mængdelære. De tabte dog pusten undervejs, så de nåede kun at behandle tallenes opbygning og gav op over for geometrien. Det var godt det samme, for deres fremstilling blev ramt af samme kritik, som vi ovenfor har berettet om for formalismens vedkomende: Gödels sætning. Så efter 1931 var det klart, at heller ikke *Principia Mathematica*, selv i sin færdige udgave, kunne være både fuldstændig og modsigelsesfri.

Oplæg 6

Kants eget favoritregnestykke i *Kritik der Reinen Vernunft* var '5 + 7 = 12'. Tag personlig stilling til, om det er en analytisk dom eller en syntetisk? Og hvis den er syntetisk, overvej om du vil opfatte den som en empirisk sag, der skal søges bekræftet ved observation af en masse eksempler på 5 + 7 = 12 i praksis, eller om sandheden af 5 + 7 = 12 er hævet over afprøvning i praksis.

Prøv tilsvarende med følgende påstande:

1) Parallelle linjer skærer ikke hinanden.

2) Vinkelsummen i en trekant er lig med 180 grader.

3) Faldloven: Faldlængde = 5 · (faldtiden)^2.

4) Enhver virkning har en årsag. (Den er lidt drilsk og kræver kendskab til Kants filosofi. Men man kan så prøve, om man kan finde argumenter, der støtter Kants opfattelse af, at denne dom er syntetisk a priori og ikke syntetisk a posteori).

Er hele diskussionen om dette rent akademisk og uden konsekvens for skolen?

MATEMATIKKEN SOM NATURENS SPROG[13]

I vores søgen i filosofihistorien efter de matematiske begrebers eksistens og sandheden af de matematiske påstande er vi havnet i en moderne position med tvivl og relativitet. For det første kan matematikken ikke være mere sand, end de påstande (aksiomer) vi går ud fra. Og selv da kan vi ikke med sikkerhed vide, om matematikken kunne føre til modstridende påstande.

Og det er da muligt, at man burde lade sagen hvile med det. Vi vil dog afslutningsvis føre nytteargumentet frem. Hvis matematikken er en ren konstruktion, hvordan kan det så være, at den er så nyttig, for ikke at sige uundværlig, til beskrivelse af naturen?

Det er vel netop, fordi matematikken er blevet konstrueret med henblik på at klare de problemer og udfordringer, som menneskeheden møder i naturen. Nej – store dele af den matematik, vi bruger i fx fysik, er konstrueret meget tidligt i sammenhænge, hvor fysikken slet ikke stod på dagsordenen.

Galileo Galilæi, renæssancens største naturfilosof, havde måske fat i noget væsentligt da han skrev:

> "Naturens store bog er skrevet i det matematiske sprog, og bogstaverne i den er cirkler, trekanter og andre geometriske figurer, uden hvis hjælp det er umuligt at forstå et eneste ord i den."

Vi finder det faktisk også forunderligt, at en matematik, der blev konstrueret i forbindelse med praktiske gøremål som handel, areal og rumfangsbestemmelse eller som ren æstetisk-filosofisk fritidsbeskæftigelse af Platons forgængere, lige netop blev det rigtige sprog at tale om naturen i.

Hvis vi opfatter matematikken som en social konstruktion, så er regningsarten 'gange' sandsynligvis konstrueret i forbindelse med handel (fra stykpris til totalpris) eller i forbindelse med arealbestemmelse. Mere end tusinde år senere prøver Aristoteles at beskrive bevægelser i naturen ved hjælp af matematik. Kraftbegrebet er ved at være godt udviklet, og Aristoteles mener, at større kraft giver større hastighed, idet man ganske vist skal tage hensyn til modstanden i det medium, bevægelsen foregår i. Hans teori herom kan udtrykkes i gangestykket:

13 Dette afsnit er en tilpasset udgave af dele af Hansen (2001b).

Kraft = hastighed · modstand.

Eftertiden har dømt denne formel forkert, skønt den dog har visse kvaliteter i en virkelighed, hvor vi arbejder med varierende og stor modstand. Men hvorfor skulle en tidlig konstruktion som 'gange' dog kunne anvendes tusinde år senere i et nyt socialt samfund og på et helt nyt vidensområde? Og hvordan kan vi i det hele taget forvente en simpel formel for sammenhængen mellem disse størrelser?

Går vi endnu totusinde år frem i tiden, finder vi Isaac Newton, der dømt med vores smag endelig får fat i den lange ende. Han beskriver i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* fra 1687 dynamikken i bevægelser, der foregår uden modstand, som fx bevægelsen af planeter og måner. Men minsandten om han ikke igen når frem til et gangestykke:

Kraft = masse · acceleration.

Hvor kom nu denne gangeformel fra? Var den i forvejen indbygget i naturen, eller var det noget, Newton i samspil med tidens sociale omstændigheder påtvang naturen[14]. Selvfølgelig betød de sociale omstændigheder meget for fremkomsten af denne formel. Men nok så meget betød det, at Kepler tidligere i 1600-tallet havde påvist, at planeterne bevægede sig i ellipsebaner, og de heri indgående størrelser som radius og omløbstid indgik i simple gangestykker.

Konstruerede Kepler så ikke den matematiske form 'ellipse' for at kunne forklare de meget nøjagtige observationer af himmellegemerne, som han havde arvet fra Tycho Brahe. Nej – ellipsen blev studeret i den græske Oldtid, uden at nogen satte den i forbindelse med himmelbevægelserne. Grækerne var så overbeviste om, at alt på himlen bevægede sig i cirkelbaner, at ellipsen var dømt ude på forhånd. Ellipsen opdagede de sandsynligvis ved at betragte skyggen af en skråtstillet cirkel eller ved et skråt snit en i kegle af ler. Men to tusinde år senere under andre sociale omstændigheder fik den hele planetsystemet til at falde på plads i en matematisk beskrivelse og leverede grundlag og motivation for Newtons forklaringer af hele dynamikken i det.

Derfor kan det forekomme mere rigtigt at sige 'opdaget' om ellipsen end

14 Man kan hævde, at Newton måtte opfinde acceleration og differentialregning for at kunne få en så simpel naturlov frem, men acceleration var dog kendt tidligere og Newtons bidrag var mere en præcisering.

‘opfundet’, hvad enten vi taler om opdagelsen i olielampens skær i Oldtiden eller fundet af planeternes ellipsebaner i nyere tid. Den første nogenlunde dokumenterede opdager synes at have været Menachos ca. 350 f.v.t., mens Apollonius fra Perga (261-190 f.v.t.) færdigudviklede teorien om ellipsen og andre cirkelskygger (keglesnit).

Den nyere matematiks begreber forekommer dog de fleste mere at være opfindelser eller konstruktioner. De såkaldte matricer blev opfundet for at kunne håndtere flere samhørende ligninger med flere ubekendte på en bekvem og teoretisk tilfredsstillende måde. Hvis man fx stod med to ligninger med to ubekendte, ville man samle tallene (koefficienterne) foran de ubekendte til en 2 × 2-matrix. Tilsvarende er en 3 × 5-matrix 3 rækker hver med 5 tal skrevet op under hinanden. I 1800-tallet opfandt man særlige regneoperationer for sådanne matricer, hvor det påfaldende var, at faktorernes orden ikke var ligegyldig. Skønt matrixregning således ikke på nogen rimelig måde kan siges at være opdaget i naturen eller være opfundet for bedre at kunne beskrive naturen, så har den vist sig meget nyttig netop til naturbeskrivelse.

En af den moderne kvantemekaniks fædre, Eugen Paul Wigner, holdt i 1959 et foredrag med titlen “*The unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*”, hvor hans hovedpointe er, at “matematikkens enorme nytte i naturvidenskaberne nærmer sig det mystiske, og der kan ikke gives nogen rationel begrundelse for det” (Wigner 1960).

Han henter naturligt nok sine eksempler fra kvantemekanikken, de mindste partiklers mekanik, der ikke kunne beskrives ved Newtons fysik. Fysikeren Max Born havde bemærket, at nogle af de regneregler, kvantemekanikkens fader Heisenberg benyttede, formelt lignede regnereglerne i matrixregning. Derfor prøvede de at omskrive nogle af den klassiske mekaniks naturlove i dette matrixsprog, og fandt til deres overraskelse en beskrivelse, en teori, der med stor nøjagtighed forudsagde udfaldet af en række forskellige typer eksperimenter med atomer.

Igen en situation, hvor noget matematik udviklet til helt andre formål, viser sig umådelig nyttigt på et nyt erfaringsområde. Og der var ikke blot tale om en tilnærmelsesvis god beskrivelse. Teorien og eksperimenterne stemte fuldstændig overens inden for de eksisterende måleinstrumenters målesikkerhed.

Oplæg 7

Overvej, om du kan være medunderskriver på synspunktet om matematikkens urimelige effektivitet i naturvidenskaberne. Og overvej, hvilke konsekvenser synspunktet må have på matematikfagets stilling i skolen samt om dette afspejles i fagets aktuelle målsætning.

HVORDAN PRODUCERES MATEMATISK VIDEN?

Efter at have belyst nogle af de fundamentale spørgsmål om, hvad matematik er, og hvorledes matematisk sandhed sikres, vender vi os nu mod selve processen, der foregår før og mens, matematisk viden opstår. Vi har behandlet det tidligere i denne bog for så vidt angår børns skabelse af viden. Så man skulle tro, at det var så meget nemmere at kortlægge matematikernes konstruktion af viden.

Problemet her er imidlertid, at svælget mellem produkt og proces er så stort, at man ikke har en levende chance for, ud fra matematikerens produkt, som det foreligger i artikler eller lærebøger, at slutte sig til, hvordan den kreative proces forud er forløbet. Det har altid været en klassisk dyd at skrive, så sporene af opfindelses-/opdagelsesprocessen bliver slettet. Og det har der sådan set været gode grunde til, fordi bedømmelsen af en artikels sandhed er ganske uafhængig af processen, der førte frem til artiklen. Så den klassiske matematikbog er som Euklids Elementer med definitioner og aksiomer i begyndelsen og derefter netværket af sætninger, hvor de mere avancerede byggede på de mere elementære, der igen bygger på grundlaget i definitioner og aksiomer. Vi har selv medtaget flere delforløb af denne type i ϒ-bogen: areallæren, rumfangslæren, udviklingen af regneregler i et legeme samt selvfølgelig vores udgave af den euklidiske geometri. Men vi har været os meget bevidste om, at disse fremstillinger ikke giver noget godt billede af den proces, der førte til teorierne[15].

15 Det var bl.a derfor, vi i ϒ-bogen også har historiske og didaktiske kapitler til supplement af de mere fagligt deduktive fremstillinger.

Matematikeren Jacques Hadamard (1865-1963) skrev i 1945 en bog om, hvorledes matematisk opdagelse foregik, set med matematikernes egne øjne (Hadamard 1954/1945). Ifølge Hadamard har der været nogle få romantisk orienterede matematikere, der så deres opdagelser, som noget der kom i en åbenbaring eller i en drøm, men så nemt synes det nu sjældent at foregå. Der er dog den sandhed i det, at det lyse indfald oftest kommer, når man slet ikke tænker på problemet: Poincaré, idet han går op i en bus, Niels Bohr i sporvognen, Einstein på bjergvandring, Newton på rekreation og siddende under et æbletræ (hvor det med æbletræet dog er en efterrationaliseret myte). Det svarer til den fra dagligdagen velkendte, at vi pludselig kommer på navnet på en person to timer efter, at vi rodede rundt i hukommelsen efter det – opsummeret i mundheldet: "lad os lige sove på det".

Hadamard når frem til følgende konklusion: Opdagelsen kommer ikke uden et første trin, der består af hårdt og bevidst arbejde med problemet. Herunder skabes en masse idéer og indfald, men stykkevis. De fleste kommer til at ligge i underbevidstheden, nogle i et slags forkammer til bevidstheden, hvor de mest frugtbare vælges og så pludselig træder frem i den fulde bevidsthed. Opdagelse er altså en valgproces, og den kreative person er en med gode fornemmelser at vælge efter, som fx det lidt upræcise æstetiske begreb, videnskabelig skønhed.

Hadamard har beskrevet den samlede proces i fire trin:

1) Forberedelse (det indledende arbejde med at sætte sig ind i problemet og komme med de første angreb på problemet).

2) Inkubation (problemer og idéer arbejder i hjernen lige som en infektion).

3) Illumination (oplysning, af andre kaldet aha-oplevelse).

4) Verifikation (efterprøvning af om det nu også er rigtigt).

Selv om Hadamard ikke fandt de helt samme trin hos alle matematikere og fysikere, syntes de dog at være typiske. Hvis processen er tilsvarende hos børn, der arbejder med problemer på deres niveau, så kræves der også i skolearbejdet mulighed for længere tids fordybelse i de samme problemer og emner, hvis den skal bære frugt.

Tyve år senere beskrev Imre Lakatos (1922-74) i sin ph.d.-afhandling de mange krinkelkroge og vildveje, der forekommer undervejs i den kreative matematiske proces. Hans udgangspunkt var, at man ikke kunne beskrive matematikkens filosofi uden at se på, hvordan matematikere historisk og i praksis har arbejdet og arbejder med matematik. Desuden så han sit eget arbejde som et opgør med den formalistiske skole inden for matematik, der ser matematikeren deducerende sig frem fra sætning til sætning ud fra nogle fastlagte aksiomer. I stedet hævder han, foregår matematik som en konstant proces af formodninger i form af kvalificerede gæt og kritik af disse formodninger, der ofte medfører, at tidligere definitioner og aksiomer forkastes og ændres.

Eulers polyedersætning som case

Lakatos bruger udviklingen af Eulers polyedersætning til at underbygge sin påstand. Han undersøger således den historiske udforskning af problemet:

Findes der nogen sammenhæng mellem antallet af hjørner H, kanter K og flader F på polyedre?

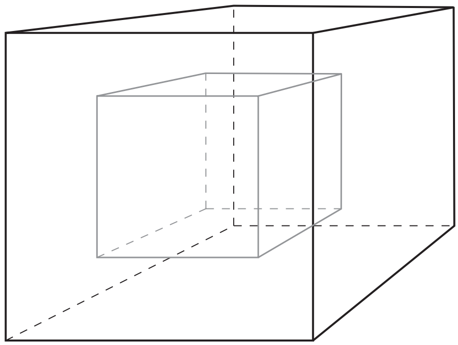
Vi giver nogle af højdepunkterne i hans gennemgang, som den fremgår af hans hovedværk: *Proofs and Refutations. The logic af Mathematical Discovery* (Lakatos 1976). Den er skrevet som en dialog mellem en lærer og nogle elever, med navne som Alfa, Delta og Epsilon.

> "Læreren: I sidste time fandt vi frem til H – K + F = 2. Vi testede denne formel på forskellig vis. Men vi har ikke bevist den endnu. Er der nogen, der har fundet et bevis?
> Elev Sigma: Jeg må indrømme, at jeg ikke har været i stand til at lave et præcist bevis for sætningen …, men da vi har vist sandheden i så mange tilfælde, kan der ikke være tvivl om, at den passer for alle polyedre." (Lakatos, 1976, s. 7).

Læreren fremlægger et bevis for sætningen, et af de første historiske beviser udtænkt af Cauchy i 1813. Men eleverne udfordrer ham på måder, der modsvarer indvendinger og forbedringer af beviset, som det historisk er udviklet. Denne historiske udvikling følger man sideløbende i et meget stort antal fodnoter i bogen. Det er således i fodnoterne, at Lakatos underbygger sin tese, men den dialogiske fremstilling gør den levende og umiddelbart overbevisende.

Det lykkes i klassen at finde et modeksempel til en påstand i beviset. De finder altså en fejl i beviset – ligesom det skete historisk. Bør man ikke efter at have påpeget en fejl i et bevis forkaste beviset og overveje helt at forkaste sætningen? Nej, sådan går det sjældent i matematikhistorien og heller ikke i Lakatos dialog. Man reparerer i stedet på beviset.[16]

Værre går det imidlertid, da eleven Alfa kommer med et globalt modeksempel, dvs. med et eksempel på et polyeder, hvor Eulers polyedersætning ikke gælder. Det er altså ikke bare en teknisk detalje i beviset, det er galt med. Han foreslår, at de skal se på en terning, hvori der er udskåret en indre terning inde i midten, så polyederet bliver som en lukket kasse med tykke vægge (se figur 3).



Figur 3.

Hvis man tæller op her, så har vi H = 16, 8 ydre hjørner og 8 indre hjørner. Vi har K = 24, fordi der er 12 ydre kanter og 12 indre. Endelig har vi F = 12, da der er 6 ydre flader og 6 indre. Vi har derfor H – K + F = 16 – 24 + 12 = 4.

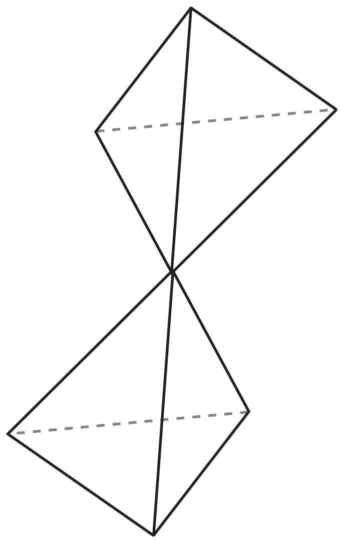
Den direkte konklusion er, at vi har fundet et modeksempel til Eulers Sætning, og at vi derfor ifølge god matematisk skik må sige, at sætningen

16 Denne lapning af bevishuller blev kendt for en større offentlighed, da Andrew Wiles for nyligt offentliggjorde et bevis for den berømte Fermats Store Sætning. Der viste sig snart et par store huller i beviset, men ingen tvivlede om, at han var på rette vej, og snart var hullerne lappet med bedre argumenter.

er falsk. Men sådan gik det ikke historisk set. Man ville have denne sætning til at være sand, fordi den var sand for så mange velkendte polyedre. Derfor søgte man at omgå problemet ved simpelthen at hævde, at den udhulede terning slet ikke var noget polyeder. Det vil sige, at man lavede om på sin definition af et polyeder eller rettere man præciserede definitionen. Et polyeder var ikke før defineret så nøje, blot der var en rumlig figur begrænset af plane flader, der mødtes i kanter, der igen mødtes i hjørner.

Situationen kan reddes, hvis vi i definitionen på et polyeder medtager, at der ikke må være huller inde i det. Så skulle Eulers Polyedersætning vel være gældende. Historien er dog her ved at udvikle sig uheldigt, for hvis et matematisk bevis ikke er færdigt én gang for alle, men hele tiden bliver repareret, så kan man jo ikke vide, hvornår man har et bevis.

Faktisk sker der det i dialogen hos Lakatos, at der bliver ved at opstå problemer. Fx viser det sig, at definitionen på et polyeder endnu ikke udelukker monster-modeksempler, der får regnestykket til at få galt facit. Det er igen eleven Alfa, der foreslår polyederet DT, som er et dobbelttetraeder, der altså består af to tetraedre, der er sat mod hinanden spids mod spids, så de får et fælles hjørne (figur 4). Regnes der på Eulers Sætning i dette tilfælde findes $H - K + F = 7 - 12 + 8 = 3$.



Figur 4.

Vi forlader[17] her Lakatos bog, men konkluderer, at matematikhistorien, bl.a. som den er fortolket af Lakatos, belærer os om, at udviklingen af matematisk viden uhyre sjældent foregår som denne viden senere fremstilles i en lærebog. Det kan meget vel være, at i al fald nogle af definitionerne og aksiomerne i teorien besluttes ret sent i arbejdsprocessen. Således er der næppe tvivl om, at aksiomerne i Euklids Elementer er valgt ret sent, efter at generationer af græske matematikere allerede havde bevist mange af de centrale sætninger i geometrien. Her behøver vi blot tænke på Pythagoras' sætning, der i al fald var bevist nogle århundreder før Euklid.

Oplæg 8

Prøv at tilrettelægge et lille opdagelsesforløb, hvor elever i 6. klasse kommer på sporet af indholdet i Eulers polyedersætning (men selvfølgelig ikke beviset). Hvilke materialer skal være til stede, og hvilke hjælpende dialoger kan I forestille jer, der skal indgå?

En social eksistens af matematiske objekter?

Lakatos' bog er blevet en standardreference blandt matematikfilosoffer, der problematiserer såvel den platoniske antagelse om de matematiske objekters eksistens i en eviggyldig idéverden som den formalistiske benægtelse af, at de har en eksistens overhovedet (fx Davis & Hersh 1981; Ernest 1998). I overensstemmelse med Lakatos, siger de, er der brug for at udvikle en matematikfilosofi, der tager udgangspunkt i fagets udviklingshistorie og i matematikerens daglige erfaringer med faget. Der er altså tale om en historisk og socialt forankret matematikfilosofi.

Davis & Hersh (1981) beskriver over 400 sider det, de kalder *den matematiske erfaring*. De diskuterer altså, hvad der er matematikeres daglige erfaringer med og forestillinger om det at lave matematik. Den erfaring er der, siger de, to sider af. Den ene er, at matematik er en menneskelig konstruktion. Matematiske objekter har altså ikke nogen eksistens, før de undfanges i matematikeres hoveder, og de er i den forstand imaginære: de

17 Vi bringer et bevis for sætningen i ε-bogen.

skabes som mentale objekter. De findes altså ikke, som Platon sagde, i en eviggyldig idéverden.

Den anden side af den matematiske erfaring er, at når først de matematiske objekter er skabt, så får de deres eget liv, deres egen objektive, sociale eksistens. De har deres egne karakteristika og følger deres egne regler. Begrebet om primtal er således en menneskelig konstruktion. Men når det nu er lavet, eksisterer det uafhængigt af noget enkeltindivid, og det er ikke for noget menneske at bestemme, om 6.768.991 er et primtal. Det findes der sand og objektiv viden om.

Ifølge Davis & Hersh bekræfter og benægter den matematiske erfaring således forskellige dele af det platoniske og det formalistiske syn på faget. Den bekræfter Platonikeren i, at matematiske objekter eksisterer uafhængigt af enkeltindivider, når de først er kreeret, men den benægter, at der er tale om en eviggyldig eksistens i en idéverden. Og den bekræfter det formalistiske syn, at matematik grundlæggende er en konstruktiv aktivitet, men siger til gengæld, at den er det i en noget anden forstand end hos formalisten. Matematik er nemlig ikke et spørgsmål om at konstruere formelle systemer, der ikke handler om noget, men om at konstruere matematiske objekter og systemer, der netop får en objektiv social eksistens, og som der kan laves sand viden om.

Hersh (1998) uddyber andetsteds, hvad der kan menes med denne menneskeskabte objektive eksistens. Når den måske er lidt svær at få hold på, er det fordi, vi har en tendens til at se verden som opdelt i to: Der er en ydre objektivt eksisterende verden på den ene side og en indre subjektiv verden på den anden. Men der er typer af objekter, der ikke hører til hverken i den private 'indre' verden eller i fysiske 'ydre' verden. Det er objekter, der har en social eksistens. Det betyder, at de er 'ydre', når de betragtes af det enkelte individ, men 'indre' når de ses udefra. Vaner, traditioner og matematik har denne tredje type af eksistens.

Den matematiske erfaring er altså, siger Davis & Hersh, at faget drejer sig om at konstruere matematiske objekter, der ikke har nogen tidligere eksistens, og at opdage og undersøge disse imaginære objekters sande egenskaber ved at formulere formodninger om dem, som diskuteres og underbygges eller gendrives i faglige fællesskaber af matematikere. Matematik handler altså om de sande egenskaber ved imaginære objekter, *the true facts about imaginary objects.*

Det er nok et mindretal af matematikere, der slutter sig til det socialkonstruktivistiske syn på matematikfaget, som Davis & Hersh her giver udtryk for. Til gengæld har Lakatos og Davis & Hersh fået relativt stor indflydelse blandt matematikdidaktikere. Det skyldes ikke mindst, at det syn på matematik, de fremlægger, synes at gå godt i spænd med de syn på læring, vi omtalte i del I.

Hvis eleverne lærer ved aktivt at tilegne sig faglige begreber og metoder og ved at engagere sig fagligt i fællesskaber, hvor matematiske formodninger og idéer udvikles og diskuteres, så må visionen være at etablere klasserum, hvor den slags er muligt. Men det er jo netop klasserum, der kan siges at ligne det, Lakatos beskriver, og den aktivitet, der foregår, er netop en, der består i at udvikle matematiske begreber og idéer og afsøge deres egenskaber.

Når vi i kapitel 1 og mange gange siden omtalte matematikreformens processyn på matematik, kan den i høj grad siges at være inspireret af Lakatos og af Davis & Hersh. Hvis det er processer som fx kommunikation, problemløsning og ræsonnementer, der kendetegner den matematiske erfaring, så er det vel også den slags processer, der skal kendetegne aktiviteterne i matematikklasserum, hvis faget med rette skal bære sit navn.

OPSAMLING PÅ KAPITEL 14

Vi har i dette kapitel set på det grundlæggende spørgsmål, om matematiske objekter har en eksistens, og hvad den evt. kunne bestå i. Vi så, at for en platoniker har de en eviggyldig eksistens i en idéverden. Den ser man normalt kun skyggebilleder af, men det er dog muligt at få indsigt i den.

For en formalist har de matematiske objekter derimod ingen rigtig eksistens, og matematisk aktivitet er en leg med definitioner og aksiomer vha. logiske slutningsregler. Desuden har aksiomerne intet med omverdenen at gøre, men er antagelser som man kan lave om eller skifte ud, hvis man hellere vil undersøge konsekvenserne af nogle andre.

Vi sluttede af med at præsentere et tredje synspunkt. Det er, at matematiske objekter er imaginære i den forstand, at de ikke findes, før de skabes som mentale konstruktioner i matematikernes faglige fællesskaber. Men så får de en eksistens, der altså er af social karakter. Den matematiske aktivitet består her i sammen med andre at skabe sådanne objekter og at undersøge deres egenskaber.

I undervisningssammenhænge har det sidste synspunkt som nævnt fået nogen indflydelse. Det skyldes, at de procesaspekter, der kendetegner det, går godt i spænd med de forståelser af læring, der også dominerer reformen. Matematik i skolen er da ikke længere primært en samling sandheder om nogle evigt eksisterende objekter, ej heller er det udelukkende en formel og logisk leg med aksiomer og definitioner. Det er også et forsøg på at lade eleverne organisere, videreudvikle og udfordre egne og andres erfaringer med tal og rum. Det er det afgørende kendetegn ved skolematematik ifølge reformen.

Oplæg 9

Tænk tilbage på jeres egen skoletid. Overvej og diskuter balancen eller den manglende balance mellem faglige processer og produkter i undervisningen. Overvej og diskuter om og hvordan undervisningen har haft indflydelse på jeres opfattelser af, hvad matematik overhovedet er.

Overvej og diskuter jeres fagsyn med henblik på jeres fremtidige arbejde som lærere: Hvad er det for et matematikfag, I gerne vil præsentere eleverne for? Og hvilke muligheder og begrænsninger forventer I at møde i den sammenhæng?