

12

TRÆK AF MATEMATIK- UNDERVISNINGENS HISTORIE I DANMARK

Vi har behandlet regnefagets tidlige historie i Υ -bogen (s. 208-223). Der fortæller vi om regnebogsforfatternes storhedstid fra 1500-1960 og om, hvordan lommeregneren derefter fjernede professionen regnelærer, og faget kom til at hedde matematik. Det var samtidig historien om, hvordan regnealgoritmerne sammen med bogtrykkerkunsten muliggjorde, at der i det hele taget kom regnebøger. Men algoritmerne medbragte også – måske utilsigtet – en tilgang til undervisningen, der opfattede regning som noget proceduremæssigt. Der blev således i perioder undervist på mekanisk vis.

Imidlertid er fortællingen om den mekaniske regneundervisning kun den ene side af historien. Med andre ord var der tidligt også andre tendenser, der gjorde sig gældende end en ensidig vægtning af færdighedstræning, i hvert fald på det retoriske niveau. Det er de to sider af historien, vi nu vil fortælle for de sidste 100 års vedkommende: historien om forholdet mellem færdighedstræning og forståelse i matematikundervisningen.

I dette kapitel skal vi altså med en bred pensel male et billede af matematikundervisningens historie i Danmark i det 20. århundrede. Eller rettere, vi skal male et billede af *diskussionerne om matematikundervisningen* i Danmark i det 20. århundrede. Billedet kan umuligt blive detaljeret, men ved at fokusere på temaet om forholdet mellem færdighedstræning og forståelse kan det males i et lys, der også har en umiddelbar relevans for diskussionerne om skolefaget i dag.

Vi vil behandle temaet med udgangspunkt i en enkelt historisk periode, 1920'erne. Herfra vil vi trække nogle udviklingstendenser til resten af århundredet. Det er hensigten, at læseren på den baggrund skal kunne:

- Danne sig et indtryk af, hvordan debatten om skolematematik har været ført i den valgte periode.
- Overskue nogle sammenhænge og relativt lange linjer i matematikkens skolehistorie og dermed få en fornemmelse af, hvilke rødder der trækkes på i dagens debat på det skolematematiske område.
- Forstå, hvad det har betydet for skolematematikken, at matematik i løbet af det 20. århundrede er blevet et fag, som alle elever skal undervises i.
- Se hvordan den skolepolitiske dagsorden, herunder matematikfagets formål og indhold, relaterer sig til bredere samfundsmæssige bestræbelser, i dette tilfælde til en demokratiseringsdiskussion.

BØLGEMODELLEN FOR REGNEDIDAKTIKKEN

Perioder med ‘mekanisk’ regneundervisning med stor vægt på færdighed og perioder med større vægt på forståelse har gensidigt afløst hinanden nogle gange i det 20. århundrede. Hansen (2006) har foreslået en bølgemodel som beskrivelse af udviklingen (figur 1). Denne bølgeopfattelse strider mod den meget nærliggende tvedeling af historien i 1) den traditionelle tid og 2) vor moderne tid. Dette er imidlertid en deling, der sjældent – både i og uden for matematikundervisningen – passer på andet end et meget overordnet niveau. For så vidt angår matematikundervisningen, tager den fejl på to punkter:

- Tænkningen om undervisning var i fortiden ikke altid så traditionel, som man tror i dag.
- Vor tids tænkning om undervisning er ikke altid så moderne, som man gerne forestiller sig.

Den første af disse pointer kan eksemplificeres med et citat som dette:

“Man hører ofte i vore Dage Klager over, at de Unge ikke kan regne, og der føjes til: “Da fik vi en anderledes Færdighed i vore Dage”. Det kan heller ikke nægtes, at det netop var det, man fik ved den gammeldags

Dette citat stammer fra en tid, der åbenbart oplevede sig som moderne, og det var en moderne regnelærerinde Johanne Lütken, som udtalte sig således i 1905. Hun var på mange punkter i overensstemmelse med læseplanerne fra vores tid, som det fremgår af nedenstående samstilling:

<p><i>Johanne Lütken 1905, s. 449</i></p> <p>Idealet for Regneundervisningen skulle være, at Børnene lærte at bruge deres medfødte sunde Fornuft, fik den udviklet – men ikke forkvaklet ved lange Forklaringer og bundne Opstillinger og Regler – og fik Lejlighed til at prøve forskellige af dem selv og Læreren foreslaede Fremgangsmaader og til at vælge den simpleste.</p>	<p><i>Fælles Mål 2003, s. 48 og s. 50</i></p> <p>Undervisningen bygger på de mange forudsætninger, som eleverne har, når de begynder i skolen.</p> <p>1.-3. kl. : Den enkelte elev skal have mulighed for på baggrund af egen forståelse at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse...</p> <p>4.-6. kl. : I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet.</p>
---	--

Så på den ene side er der moderne formuleringer som disse fra 1905. På den anden side kan man fra vores tid finde en formulering som denne fra chefkonsulent i Dansk Industri, Hanne Schou:

“Matematik er et færdighedsfag, og det, der er brug for, er, at børn lærer at regne. De skal ikke eksperimentere sig frem til, hvordan to tal bliver lagt sammen, eller hvordan man ganger brøker med hinanden.” (Schou 2000).

Dette citat illustrerer den anden indledende pointe i dette kapitel, at nutidens tænkning om skolematematik ikke altid er så reformorienteret, som man tror. Citatet stammer fra en avisdebat i 2000. Der blev her fra nogle sider udtrykt en vis skepsis over for den danske reformlæseplan i matematik, der var kommet med faghæftet fra 1995. I en periode var debatten skarp, men den døde hurtigt ud. Den konflikt, den antydede med et reformorienteret syn over for et mere traditionelt og færdighedsorienteret syn på matematikundervisning, blev således hverken langvarig eller markant. Det kan nævnes, at en sådan konflikt var åbenlys i USA i en længere årrække, hvor den gik under betegnelsen *the math war* – matematikkrigen (se fx Wilson 2003).



Figur 2, Avisdebat i år 2000 med kritik af læseplanen fra 1995 (se fx Schou 2000).

For at få et historisk perspektiv på den aktuelle situation her i begyndelsen af det 21. århundrede vælger vi nu at se på en historisk situation, der på nogle punkter har ligheder med vores tid. I 1920'erne oplevede man sig – måske naturligt oven på en afsluttet første verdenskrig – på mange måder som moderne. Men netop på matematikundervisningens område kan man konstatere en tilbagevenden til en mere færdighedspræget undervisning, som vi i dag ville kalde traditionel. Konflikten mellem den moderne selvopfattelse i denne periode og det mere traditionelle syn på matematikundervisning eksemplificerer, at det lidt luftige begreb 'modernitet' ikke i sig selv kan forklare, hvornår vægten bliver lagt på forståelse snarere end færdigheder.

ET ENKELT HISTORISK NEDSLAG: FÆRDIGHEDSKRAVENE CA. 1920

Hansen (2006) fremhæver fire mulige årsager til, at der fra omkring 1920'erne blev et snævrere fokus på færdigheder i matematikundervisningen. Den ene af disse bestod af en psykologisk udfordring til den stærke tro på regning som formaldannelsesfag, dvs. som en 'tankens slibesten', der kan skærpe ideoende mentale kræfter. De tre andre årsager er hhv. nye krav fra erhvervs- livet, ministeriets indførelse af effektiv testning af regnefærdigheder og regnelærernes praktiske erfaringer. Hver for sig udfordrer disse fire tendenser vægtningen af forståelse frem for viden og færdigheder i matematikundervisningen. Vi skal se på hver af de fire for sig.

1. Et psykologisk opgør med formaldannelsens mulighed

Opgøret med formaldannelsestænkningen synes at starte med en doktorafhandling. I 1912 skrev pædagogen og filosofen Axel Dam en afhandling "Om Muligheden af formel Opdragelse af de intellektuelle Evner" (Dam 1912). Det spørgsmål, han ville undersøge, var, om man ved at arbejde med én slags materiale i skolen kunne forvente "større Energi og Skarphed i Behandlingen af nyt materiale". Spørgsmålet drejede sig altså om overførbarhed af viden, dvs. af det vi med en engelsk betegnelse også omtaler som transfer. Dam konkluderede efter en gennemgang af den foreliggende forskning, at man absolut ikke kunne forvente en sådan overførbarhed.

Sagen var ifølge Dam, at 1800-tallets psykologi, hvor man troede, at hver evne havde sit særlige sæde i hjernen (sin 'muskel' der kunne trænes) var forkert. Derfor var det ikke så underligt, at fagene ikke kunne have formaldannende virkninger.

Dams psykologiske teorier skulle nogle år senere få støtte fra den nye psykologiske retning, behaviorismen, der snart blev dominerende på mange universiteter, især i USA. Herefter forstummede al tale om formaldannelse i den klassiske forstand, mens ambitionen om at lære mere end det direkte stof i matematikundervisningen selvfølgelig har levet videre under andre navne.

2. Nye krav fra erhvervslivet

En anden udfordring til matematikkens fokus på begrebslige forståelser frem for på færdigheder kom fra erhvervslivet. I 1922 åbnede Det Danske Luftfartsselskab sin første rute. I 1923 fik Danmark sin første færdselslov. Fra ca. 3.000 biler før krigen 1914-18 var tallet i 1920 vokset til 18.000 og passerede i 1929 de 100.000.

Den industrielle produktion, fx den store produktion af biler over hele verden, var muligjort af samlebåndsteknikken. I bilindustrien blev bilerne langsomt, men sikkert ført frem til hundredvis af arbejdere, der hver var ekspert i at udføre sin specielle detalje på bilen og kun den. Midt i 20'erne samlede Fordfabrikkerne i København på den måde omkring 50.000 biler om året. Det princip fra den moderne industri, at hver udførte sin specialiserede del af en produktion, måtte få indflydelse på industriens efterspørgsel efter kvalifikationer hos de nye årgange, der forlod skolen. Der fulgte derfor et ønske om, at man skulle koncentrere sig om de elementære færdigheder – også i matematik.

Det var en tænkning, der fik genklang i skolekredse, hvor bl.a. direktøren for Købmandsskolen, Marius Vibæk, efterlyste sikkerhed i almindelige færdigheder. Han fandt, at man i regning lagde for lidt vægt på taltræning: “Erhvervslivet kræver, at lærlingen kan tumle enkle talforbindelser med absolut sikkerhed” (Hansen 2002, s. 79). Og man lyttede til erhvervslivet i disse år, hvor arbejdsløshedsprocenten i fx 1927 var helt oppe på 22 %. Desuden var tænkningen i god samklang med en tillokkende pædagogisk metafor, her formuleret af lærer Nørby, som vi skal vende tilbage til: “Barnet staar bedre rustet for Livet som Mester paa et lille Omraade end som fuser i alt” (ibid., s. 83).

3. Ministeriets indførelse af effektiv testning

Efter Almenskoleloven fra 1903 var folkeskolens ældre klasser opdelt i bogligt orienterede mellemskoleklasser og almindelige folkeskoleklasser. På den baggrund ville undervisningsministeriet fra 1917 sammenligne de opnåede regnefærdigheder på de to grene. Man testede derfor et repræsentativt udsnit af 14-årige på tværs af skoleformerne (se figur 3).

Folkeskoleklasserne havde ro til at koncentrere sig om regning, mens mellemskoleeleverne også skulle i gang med matematik. På den baggrund kunne

man måske have forventet en bedre regnefærdighed i folkeskoleklasserne. Men målt på en skala fra 0 til 15 afsløredes det, at folkeskoleeleverne kun fik 7,7 svarende til mindre end halvdelen rigtige mod mellemskoleelevernes 10,4. Opgørelsen er fra 1918, hvor opgaverne i en tretimers prøve var:

I.

En slagter solgte i en Uge ti Oksekroppe, der vejede 245,5 Kg, 256,8 Kg, 195,6 Kg, 304 Kg, 284,75 Kg, 318,75 Kg, 265,25 Kg, 295,5 Kg, 184,7 Kg og 192,5 Kg. Hvor meget Kød solgte han i alt, og hvor meget kostede alt Kødet, naar 1 Kg regnes til 2 kr. 8 øre?

II.

En Mand efterlod sig ved sin Død 70500 kr. Efter at hans Gæld som beløb sig til 3867 kr 76 Øre, var betalt, skulle Resten deles lige mellem 19 Arvinger. Hvor meget fik Enhver af disse?

III.

En Mand køber en Byggegrund af Form som et Rektangel, $48 \frac{3}{4}$ m lang og 36 m bred, og gav 2 Kr. 40 Øre for hver Kvadratmeter. Paa Grunden byggede han et Hus, der kostede 9578 Kr. 64 Øre. Forskellige Udgifter udgjorde 619 Kr. 86 Øre. Hvor meget kostede Ejendommen i det hele?

IV.

En Mand købte en Ejendom for 65400 Kr. Omkostninger ved Handelen udgjorde $3 \frac{2}{5}$ Pct af Købesummen. Han lod Ejendommen istandsætte, hvad kostede 776 Kr. 40 Øre. Han solgte den saa for 74100 Kr. Hvor mange Pct. tjente han?

Figur 3. National stikprøvetest for 14-årige i 1918.

Det stod ikke godt til i denne prøve. Det foruroligende var først og fremmest, at 11 % i mellemskolen og 32 % i folkeskolen ikke havde regnet en eneste af opgaverne bare nogenlunde korrekt. Generelt kneb det med at gange decimaltal sammen (opgave I) og med procentregning (opgave IV).

Ministeriets testning var tænkt som et indholdsneutralt instrument, der blot skulle sammenligne præstationerne hos eleverne i de to skoleformer. Men den gav den nødvendige dokumentation for den generelle kritik af, at der ikke var tilstrækkeligt fokus på færdighedsbeherskelsen.

4. Regnelærernes bud på ændringer

En praktiserende regnelærer, Axel Nørby fra Silkeborg, skriver i 1929 i rubrikken "Skolens daglige liv og arbejde" i tidsskriftet Vor Ungdom:

"Erhvervslivets Anke over Ungdommens Usikkerhed i den elementære Regning og de eksperimentelle Forsøgs fremhævelse af den store Forskel paa Børns Begavelse tyder paa, at der maa lægges andre Principper til Grund, hvis Arbejdsvilkårene og dermed Resultaterne skal forbedres.

Vanskeligheden ved Arbejdets Planlæggelse skyldes Forskellen paa Begavelse; men Erhvervslivets krav om Sikkerhed i det elementære letter Sagens Løsning. Dette medvirker forhaabentlig til at fæstne den Tanke, at Barnet staar bedre rustet for Livet som Mester paa et lille Omraade end som fuser i alt." (Hansen 2002, s. 83).

Målet måtte derfor være at give alle børn sikkerhed og hurtighed i elementær regning, som den brugtes i det praktiske liv.

En af forfatterne til det, der skulle blive det dominerende lærebogssystem i 40 år, Ernst Gehl, gik ind i diskussionen om den manglende regnefærdighed i 1921. Han troede som flere andre, at den "mekaniske færdighed var større for 25 år siden, end den er nu" (Gehl 1921). Han foreslog i den forbindelse en bølgemodel for tidernes skift mellem vægt på færdighed og forståelse:

"Sagen er vel imidlertid den, at man ved Regnefærdighed maa forstaa saavel mekanisk Færdighed som Forstaaelse af de foreliggende Opgaver. Som det imidlertid gaar med saa mange Forhold her i Livet, at disse følger Bølgebevægelsen, saaledes gaar det ogsaa med Regneundervisningen, idet man snart har lagt Vægt paa den ene Side af Regnefærdigheden: den mekaniske, snart paa den anden: Forstaaelsen.

Det rigtigste ville dog maaske være at følge den gyldne Middelvej" (Ibid.).

Var bøgerne i 'den mekaniske færdighedstid' præget af rene rækker af tal, var de, argumenterer Gehl, til gengæld i den netop forløbne 'forståelsestid' præget af bogstaver, dvs. af alt for mange tekstopgaver. Prisen havde været et fald i regnefærdighed, og dermed kunne tekstopgaverne ikke udfylde deres

mission. Den gyldne middelvej måtte både udvikle barnets talfærdighed og forståelse på samme tid: "Uden Talfærdighed taber Børnene nemlig Lysten til Regning og faar for lidt Tid til at gennemtænke Opgaven; uden Forstaaelse kan Regning ikke blive det tankeøvende Fag, som det burde" (ibid. s. 83f.).

Derfor lavede Gehl sammen med Friis-Petersen m.fl. lærebogssystemet *Den ny Regnebog*. Det var et timeopdelt system, der gav den usikre lærer al mulig støtte, og bl.a. i kraft af lærervejledningen var den faktisk en drejebog for matematikundervisning (se figur 4). *Den ny Regnebog* blev brugt år efter år til langt op i 1960'erne, men ironisk nok kom den til at eksemplificere det, en senere tid har kaldt traditionel regneundervisning.

45. Time. (Tabel 5- og 15-Stykket).

Multiplikation med 10 og 100. Ved Timens Begyndelse skriver Læreren en Række Opgaver op paa Skoletavlen til Indøvelse af Multiplikation med 10 og 100 ved Flytning af Kommaet, f. Eks.

10 · 2,75 Kr. 10 · 0,06 m; 10 · 1,73 hl; 10 · 2,507 kg
100 · 8,25 Kr.; 100 · 2,365 m; 100 · 0,275 kg.

Hovedregning.

1) $3 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3$; $5 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,7$; $10 \cdot 0,5 - 5 \cdot 0,5$
 $5 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,4$; $6 \cdot 1,5 - 7 \cdot 0,2$; $10 \cdot 1,5 - 4 \cdot 1,5$

2) $8 \cdot 0,15$ Kr. — $4 \cdot 0,15$ Kr.; $3 \cdot 0,15 + 5 \cdot 0,15 - 7 \cdot 0,15$
 $5 \cdot 1,15$ Kr. — $2 \cdot 1,16$ Kr.; $4 \cdot 0,03 + 5 \cdot 0,04 - 2 \cdot 0,05$

3) Omsæt til Meter: 8 m 3 dm 6 cm; 1 m 7 dm 5 cm;
5 m 3 dm; 3 dm 7 cm; 10 m 5 cm; 20 m 5 dm.

Tavleregning.

I Nr. 4—7 regnes der med Benævnelsen m.

Nr. 4 regnes paa Skoletavlen.

4) 15 · 3 m 6 dm 7 cm 8) 65 · 9,27 Kr. + 5 · 0,69 Kr.
5) 15 · 5 m 6 dm 7 cm 9) 74 · 9,49 Kr. + 6 · 0,79 Kr.
6) 14 · 14 m 4 dm 3 cm 10) 84 · 9,55 Kr. + 4 · 1,45 Kr.
7) 12 · 33 m 6 dm 7 cm 11) 97 · 9,30 Kr. + 6 · 1,15 Kr.

Resultater: 4) 55,05 m 5) 85,05 m 6) 202,02 m 7) 404,04 m
8) 606 Kr. 9) 707 Kr 10) 808 Kr. 11) 909 Kr.

Figur 4. Friis-Petersen m.fl.: *Den ny regnebog* fra omkring 1920 tilstræbte "Fasthed, Bestemthed og Orden i Arbejdet", og blev gennem 40 år vel modtaget af regnelærerne. Her vises 45. time i femte klasse.

Oplæg 1

Prøv at trække paralleller fra udviklingen og argumentationen omkring 1920 til i dag. Følg fx opdelingen i de fire punkter (s. 498-502) og diskuter dem hver for sig.

Har du selv oplevet en kritik af de aktuelle læseplaner i matematik i stil med den kritik, som er illustreret i figur 13-2?

Oplæg 2

To lærerstuderende A og B har en samtale i forlængelse af afsnittet ovenfor. Digt videre på deres 'dialog'.

A: Lærer Nørby fra 1929 har da egentlig ret, når han siger: "*Barnet står bedre rustet for livet som mester på et lille område end som fuser i alt*". I al fald må eleven forlade skolen med perfekt regnefærdighed.

B: Nej, forståelse er da så langt vigtigere, for så kan eleven bedre klare nye situationer, der ikke helt er som i skolen.

A: Jamen, forståelse uden færdighed er nul værd...

Oplæg 3

Da tyvernes færdighedsbølge havde fungeret i et årti, testede man igen de 14-årige børn med en test, hvor et af spørgsmålene lød:

"Find overfladen af en mursten, der er 24 cm lang, 10 cm bred og 5,6 cm tyk"

Selv om spørgsmålet ikke er vanskeligt, svarede det ikke til nogen formel, børnene havde lært. Det er formodentlig en årsag til, at kun 11 % svarede rigtigt. Det interessante er, at der var flere, der benyt-

tede den velindøvede formel for en kasses rumfang og angav korrekt facit for dette.

Fortolk dette resultat i lyset af diskussionen om færdighed versus forståelse.

MATEMATIK FOR ALLE

Hvis man skal karakterisere udviklingen i matematikundervisningen i Danmark i det sidste århundrede kortest muligt må det blive med slagordet 'Matematik for alle'¹. I den periode er matematik gået fra at være et fag, som næsten ingen blev undervist i til at være for alle, i hvert fald i en skemateknisk forstand. Mens der således i 1910 kun var godt 1 procent af en årgang, der havde matematik – nemlig dem der kom i gymnasiet – havde de det alle sammen ved århundredets udgang.

Det første skridt i den retning af en udvidet matematikundervisning kom i Danmark med Almenskoleloven af 1903. Der blev da indført en brobygning, kaldet mellemskolen, fra folkeskolen til gymnasiet. Af læseplanerne, der udmøntede denne lov, fremgår det, at matematik nu blev et fag i mellemskolen, mens faget i 1.-7. klasse kun var repræsenteret ved det gamle regnefag, som det var beskrevet allerede i Sthyr's cirkulære fra 1900, men som i alt væsentligt var gældende til 1958:

“Første Trin (1.-3. klasse, også kaldet forskole)

De fire Regningsarter med Tal indtil 1000. Regningen anskueliggøres, og der begyndes med benævnte Størrelser.

Andet Trin (4.-5. klasse)

De fire Regningsarter med større Tal og de forskellige almindelige Benævnelser. Anvendelse af Decimalbetegnelser ved tildelte Størrelser og Regning med ensbenævnte Brøker. Simple Opgaver i Forholdsregning.

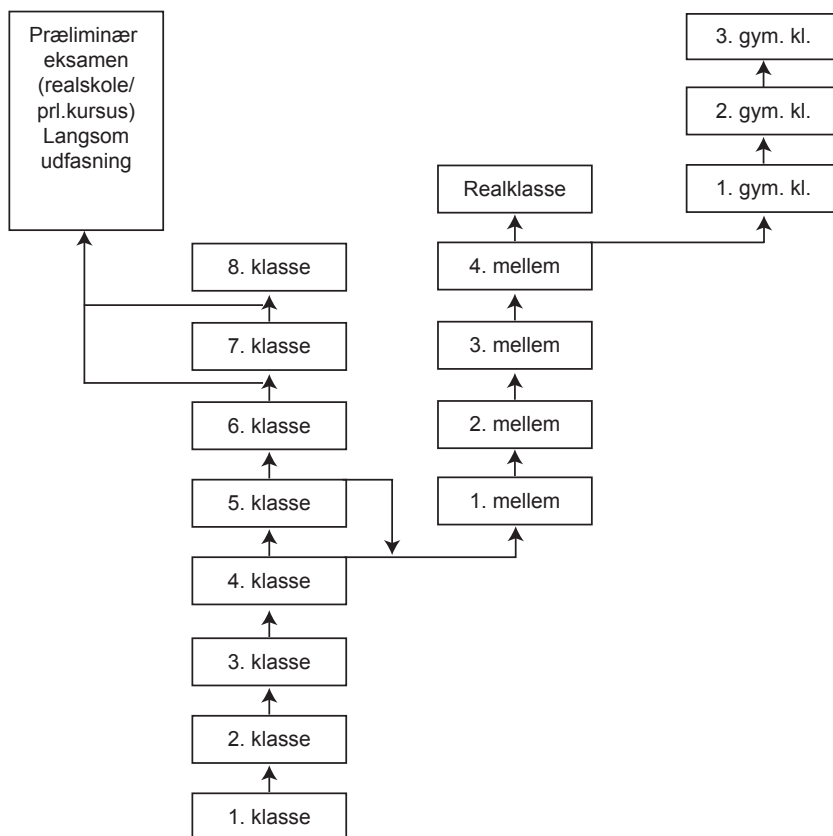
1 Det kommer selvfølgelig lidt an på, hvordan man definerer 'matematik', for elementær regning blev for alle allerede med skoleloven af 1814.

Tredje Trin (6.-7. klasse)

Forholdsregning og dens Anvendelse (derunder Procentregning). De fire Regningsarter med Brøk. Decimalbrøk.

Det anbefales i de ældste Klasser at anvende nogle Timer til et kortfattet Kursus i Anskueliggørelse og Beregning af geometriske Forhold ved Hjælp af et Sæt stereometriske Figurer.”

(Hansen 2002, s. 63).



Figur 5. Skolestrukturen efter Almenskoleloven af 1903.

Mellemskolens undervisning i regning og matematik var på i alt 5-6 ugentlige timer i fire år og var opdelt i regning, aritmetik og geometri. Regnefaget var fra starten møntet på en formaldannelse – en hjernegymnastik. Det fremgik af vejledningen til faget, hvor det hed: “Regning er et i højeste grad forstandsudviklende fag, og et overordentligt vigtigt nyttefag” (ibid., s. 47). Det forstandsudviklende udfoldede sig i hovedregning og i de videregå-

ende problemregninger, der kaldtes forholds-, blandings- og delingsregning, men der var også megen praktisk handels- og finansieringsregning i fagets læseplan².

Aritmetik var læren om den grundlæggende regning, men i modsætning til de første skoleårs regneundervisning med udpræget vægt på forståelse og argumenter, der nærmede sig regulære beviser. Det markante var, at der tidligt blev indført bogstaver til at betegne tallene, så faget blev til en form for algebra, selv om det altså gik under betegnelsen aritmetik. Der var dog grænser for, hvor langt der skulle nås i algebraen. Således slutter læseplanen for aritmetik med: "Fremdeles Løsning af kvadratiske Ligninger med Tal-koefficienter, uden dog nogen Formel kræves lært udenad" (ibid., s. 50).

Ser vi på geometrien, fremgik indholdet af læseplanen fra 1904:

"C. Geometri. Undervisningen heri skal omfatte følgende Afsnit af Plan-geometrien i elementær Fremstilling: den rette Linies og Planens Grundeigenschaften, rette Liniestykkers Lige- og Uligestorhed samt Maaling, parallelle Linier; Trekanter (Kongruens, Lige- og Uligestorhed af Sider og Vinkler, Skraalinier), Firkanter (Trapez, Parallelogrammer); Cirklen (Stilling til en ret Linie, to Cirklers indbyrdes Stilling), Vinklers Afhængighed af Cirkelbuer); Arealer af Polygoner (Cirkelns Længde og Areal skal være bekendt, men kræves ikke udledt matematisk); Sætningen om Sidernes Proportionalitet i ensvinklede Trekanter (Beviset føres kun for det Tilfælde, hvor Siderne er kommensurable) med nogle af de sædvanlige Anvendelser til Beregning af Liniestykkers Længde, derunder Sætninger om den retvinklede Trekant.

Der skal helt igennem lægges særlig Vægt paa Løsning af simple Konstruktionsopgaver, hvorhos Eleverne indøves i at udføre den herhen hørende Tegning ordentlig og nøjagtig."

Man kan få et indtryk af matematikkens niveau i mellemskolen fra 1903 til 1958 ud fra eksamenssættet fra 1940. Den skriftlige eksamen var opdelt i en regneprove og en matematikprøve, hvor den sidste dækkede aritmetik og geometri:

2 Disse læseplaner og vejledninger hed Kongelige Anordninger og originalkilderne findes gennem Hansen (2002), hvor historien er fortalt i større detalje med fuld kildehenvisning.

“Mellemskoleeksamen i maj-juni 1940

Regning

1. En dansk Købmand køber i England 600 m Klæde for 4 sh 11 d pr. m, hvortil kommer 12 pCt i Forsendelsesomkostninger og Told.

Beregn Købmandens samlede Udgifter i danske Penge, naar 1 Pund = 20 sh = 240 d = 22,40 Kr.

Ved Salget af Klædet faar han i alt 4229,12 Kr. ind. Hvor mange pCt (1 Dec.) tjener han?

Hvor meget faar Købmanden pr. m (hele Øre), naar han før Salget har maattet kassere 17 m?

2. P køber en rektangulær Grund ABCD, hvor $AB = 48,5$ m og $BC = 112,6$ m, for 2,70 Kr. pr. m^2 .

Hvor mange m^2 er Grunden, og hvad er Købsprisen for den?

Langs Siderne AB og BC anlægges et Læbælte, som overalt er 2,1 m bredt, hvilket koster 70 Øre pr. m^2 . Hvor mange m^2 gaar der med til Læbæltet, og hvad koster det?

Resten af Grunden anlægges som Have, hvilket koster 65 Øre pr. m^2 .

Hvor mange m^2 er Haven, og hvor store er P's samlede Udgifter (Købsprisen for Grunden samt Anlæg af Læbælte og Have)?

Hvor mange pCt (1 Dec.) er de samlede Udgifter større end Købsprisen for Grunden?

Matematik

1. Find x af Ligningen $\frac{5}{1+x} - \frac{3x}{2-x} = \frac{7}{3}$ og gør Prøve.

2. Konstruer en indskrivelig³ Firkant ABCD, hvor $\angle A = 82\frac{1}{2}^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ og $AB = BC = 5$ cm.

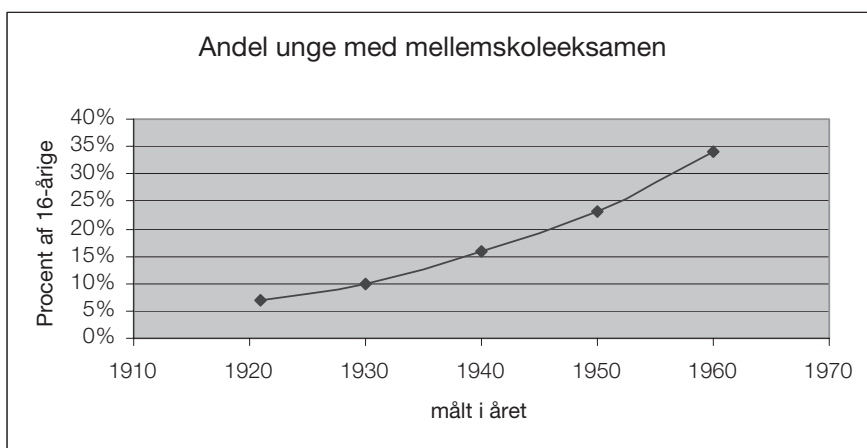
Find $\angle C$ og $\angle D$, de Vinkler, hvori $\angle A$ og $\angle C$ deles af Diagonalen AC, samt de Vinkler, hvori $\angle B$ og $\angle D$ deles af Diagonalen BD.”

Hvor mange elever fik så lejlighed til at stifte bekendtskab med mellemskolens matematik? For at blive optaget skulle man bestå en optagelsesprøve,

3 Dette betyder, at firkanter kan indskrives i en cirkel eller med andre ord, at den har en omskrevne cirkel, der går gennem alle fire hjørner. Da en periferivinkel er halvt så stor som den centervinkel, der spænder over den samme cirkelbue (tjek et par eksempler!), gælder det, at modstående vinkler i en indskrivelig firkant har vinkelsummen 180° (vis det!).

som man kunne indstille sig til efter 5. klasse (eller efter 4. klasse i mange byer). Det var der mange, der gjorde, og som det fremgår af figur 6, opnåede mellemskoleeksamen en ungdomsandel på 35 % i slutningen af 1950'erne.

Selv om mellemskolen havde social slagside, blev der plads til grupper, der tidligere havde været uddannelsesmæssigt underprivilegerede. Således blev kun 17 % af eksaminerne taget af arbejderklassebørn ved århundredets begyndelse, mens de stod for 31 % af eksaminerne i 1940, hvis man slår de tre eksaminer under 1903-loven sammen under ét, dvs. realeksamen, præliminæreksamen, og studentereksamen. For hovedpartens vedkommende var det realeksamen, de tog. Det gik langsommere med adgangen til studentereksamen, da kun 3 % af en studentereksamensårgang i 1941 var fra arbejderklassen – et tal der langsomt voksede til 8 % i 1961. Så skævhed eller ej – situationen for den sociale mobilitet var bedre end før Almenskoleloven af 1903⁴. Desuden steg pigernes andel af eksaminerne fra 23 % til 46 % i 1940, så man nærmede sig ligestilling på dette område.



Figur 6. I løbet af mellemskolens levetid voksede elevfrekvensen til 35 %.

Enhedsskolens gennembrud

Set isoleret var mellemskolen en succes. Men to ud af tre elever blev tilbage i en folkeskole, hvor de bogligt dygtigste var gået andre steder hen, og hvor der for lærerne var mindre prestige i at være end i mellem- eller realskolen.

⁴ For detaljer og nærmere kildehenvisninger se Hansen m.fl., 2008.

Ganske vist havde man med skoleloven af 1937 lavet en eksamensfri mellem-skole ud af 6.-8. klasse, en skole der var mere praktisk orienteret, og som blev drevet af stor entusiasme fra pionerernes side og med de bedste hensigter om at lave en skole, der var ligeværdig med eksamensmellemskolen.

Men 'den fri mellem' blev dog aldrig nogen succes, hvilket bl.a. skyldtes, at hele processen blev sat i stå af krigen 1940-45, og den på trods af hensigterne aldrig fik samme prestige som eksamensmellemskolen. På den baggrund var det i begyndelsen af 1950'erne klart, at der skulle laves en ny skolestruktur. Der blev talt for en enhedsskole, men på den anden side havde mellemskolen været en sådan succes, at man ikke gerne ville fjerne den uden at erstatte den med noget lignende. Løsningen med skoleloven af 1958 blev en enhedsskole op til og med 7. klasse, hvorefter man – i lighed med i loven fra 1903 – delte eleverne i en realafdeling med tre klassetrin og 8.-10. klasse som alternativ.

For at få dette kompromis vedtaget af et bredt politisk flertal indførte man en mulighed for at dele 6.-7. klasse i boglige og almene klasser. Det skete, hvis ikke forældrene udtrykte ønske om at holde klasserne samlet. Det gjorde de imidlertid i udpræget grad mod slutningen af 1960'erne, og forældrene blev således i praksis afgørende for gennemførelsen af den udelte skole. Den blev først lovgivningsmæssigt gennemført med skoleloven af 1975, hvor realklasserne blev afskaffet. Den sidste rest af den delte skole stod bl.a. matematikfaget for, idet eleverne kunne deles i 8.-9. klasse i matematik, fysik og fremmedsprog. Først med skoleloven af 1993 forsvandt denne mulighed, og den udelte enhedsskole var endelig indført.

Det, at delingen forsvandt fra skolen, fik stor indflydelse på fagene regning og matematik. For det første forsvandt nu behovet for at opdele fagene i det meget praktiske og færdighedsorienterede regnefag og det mere studieforberedende matematikfag. Således indførtes med faghæftet efter 1975-loven betegnelsen *Regning/matematik* for det samlede skolefag, og efter 1993-loven udgik betegnelsen regning helt, og faget hed derefter blot *Matematik*.

Demokratiprægning af matematikfaget

Enhedsskolen blev gennemført i sammenhæng med en stor demokratiinteresse, ikke mindst i forbindelse med en stadig større opmærksomhed på uddannelsernes rolle i forbindelse med at skabe lige muligheder for alle. I

folkeskoleloven fra 1975 kom det til udtryk i formålsparagraffen, hvor det bl.a. hedder:

“Stk. 2 Folkeskolen må i hele sit arbejde søge at skabe sådanne muligheder for oplevelse og selvvirksomhed, at eleven kan øge sin lyst til at lære, udfolde sin fantasi og opøve sin evne til selvstændig vurdering og stillingtagen.

Stk. 3. Folkeskolen forbereder eleverne til medleven og medbestemmelse i et demokratisk samfund og til medansvar for løsningen af fælles opgaver. Skolens hele dagligliv må derfor bygge på åndsfrihed og demokrati.” (Lov om folkeskolen, 26. juni 1975, kap. 1 § 2).

Skoleloven af 1993 havde den samme grundlæggende tanke, selv om vægten var rykket lidt i retning af det personlige ansvar: “Skolen forbereder eleverne til medbestemmelse, medansvar, rettigheder og pligter i et samfund med frihed og folkestyre” (kapitel 1, § 1).

Demokratiprægning af matematikundervisningens indhold

Det var ikke kun de generelle bestemmelser for enhedsskolen, der var præget af tidens demokratitænkning. Også faget matematik blev ændret i og med, at det blev et fag for alle på en enhedsskole. Ændringen vil vi kalde en demokratiprægning af faget. Med “demokratiprægning” mener vi, at faget indholdsmæssigt må bidrage til, at eleverne bliver aktive borgere i et demokratisk samfund, dels i at livet i klassen i højere grad skal være præget af demokratiske samværsformer. Vi kan illustrere denne udvikling ved at se på matematikfagets formål fra den Blå Betænkning til i dag:

1960 formål for regning og matematik 1. – 9. skoleår:

“At opøve og anvende de færdigheder i regning, som eleverne får brug for i livet uden for skolen, i familie, samfund og erhverv.

At give eleverne fortrolighed med geometriens og aritmetikkens enkleste grundbegreber og metoder.”

(Blå betænkning s. 74).

1976 formål for regning/matematik

“Det skal tilstræbes, at eleverne tilegner sig arbejdsmetoder, der kan sætte dem i stand til såvel på egen hånd som i samarbejde dels at erkende, formulere og løse problemer, dels at skaffe sig viden.” (Undervisningsvejledning 1976, s. 7).

Hvor samfundet og formålet med læringen i 1960 klart lå senere og uden for skolen, giver formuleringen fra 1976 en fornemmelse af, at arbejdsmetoder, der beskrives, skal udfolde sig nu, at samfundsborgeren er kommet ind i skolen. Det bliver endnu klarere i faghæftet af 1995 som opfølgning på 1993-loven:

“Formålet med undervisningen i matematik er, at eleven bliver i stand til at forstå og anvende matematik i sammenhænge, der vedrører dagligliv, samfundsliv og naturforhold ...

Undervisningen skal medvirke til, at eleverne oplever og erkender matematikkens rolle i kulturel og samfundsmæssig sammenhæng. Med henblik på at kunne tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab, skal eleverne kunne forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse.” (Fælles Mål, s. 11).

Det er påfaldende store krav, der stilles i fagmålet fra 1995, og dette fagmål er fastholdt til i dag (oktober 2007). Men for at der ikke blot skulle være tale om smukke hensigter, gav faghæftet idéer til, hvordan det kunne gribes an. Figur 7 viser en del af et oplæg til et undervisningsforløb fra undervisningsvejledningen. Eleverne skal tage stilling til en miljøsag, hvor et firma får dispensation i forbindelse med et skorstensbyggeri. Eleverne skal på baggrund af oplysningerne i oplægget bl.a. tage stilling til, om de vil klage til Miljøstyrelsen.

forældre, er hun i stadig højere grad blevet en samarbejdspartner, en vejleder, en coach i elevens personlige og faglige udvikling.

På sin vis falder et sådant mere ligeværdigt forhold mellem lærer og elev godt i tråd med det ændrede syn på undervisning og læring, vi har arbejdet med i Del I og II. Det var her en hovedidé, at elevernes forforståelser skal tages alvorligt som udgangspunkt for lærerens undervisning. Den gamle forestilling om, at læreren blot skal gennemgå et på forhånd planlagt stof fortrænges af krav om, at hun skal forstå elevernes medbragte viden og på den baggrund hjælpe eleven videre i sin faglige udvikling. Desuden skal eleverne nu involveres i egentlig matematisk aktivitet, hvor de selvstændigt og i fællesskab går på opdagelse i faglige problemstillinger med udgangspunkt i relativt åbne oplæg. Og endelig forventes de selv at formulere matematiske formodninger, der kan danne udgangspunkt for fortsatte faglige undersøgelser. Det sætter eleverne i en anden og stærkere rolle end i tidligere tiders matematikundervisning.

Desuden er en sådan undervisning kendetegnet ved det, vi kaldte planlagt uforudsigelighed. Såvel elevernes forforståelser og de forståelser, de udvikler i løbet af undervisningen, som deres forslag til spørgsmål og hypoteser, der kan undersøges, er ofte overraskende og derfor ikke nogen, man som lærer har mulighed for at forudse. Det indebærer, at læreren ikke altid er den, der straks kan besvare ethvert spørgsmål.

Det betyder imidlertid ikke, at den nye situation nødvendigvis fører til et tab af lærerautoritet. Men det betyder, at læreren må kunne agere fleksibelt og netop med autoritet i et fagligt og socialt samspil med eleverne. Lærerautoritet er ikke i samme grad som tidligere noget, der kommer med titlen. Og det kommer heller ikke af at være autoritær. Det er i højere grad noget, man skal gøre sig fortjent til ved en fleksibel imødekommenhed over for eleverne og deres faglige og sociale situation.

Overgangsproblemer til gymnasieskolen

I begyndelsen af 1900-tallet var det kun ca. ½ % af en ungdomsårgang, der kom i det matematiske gymnasium. Det tal steg, og omkring 1960 var det ca. 4 %. Væksten fortsatte, og som det fremgår af figur 8, blev matematik et fag for alle, samtidig med at tilgangen til det matematiske gymnasium voksede mest.

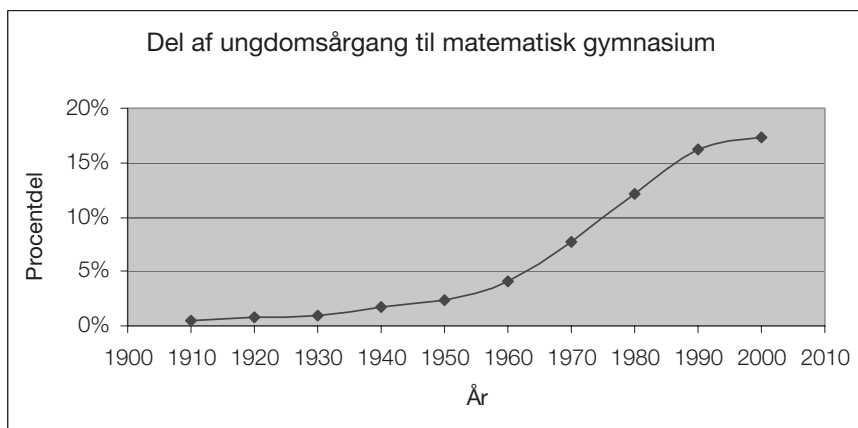
Gennem 1980'erne og 1990'erne kunne man ofte høre gymnasiets mate-

matiklærere beklage sig over, at det ikke gik så nemt med at nå de ønskede mål i gymnasiet som tidligere.

Gymnasiernes matematiklærerforening beskrev allerede i 1981 det, de så som et misforhold mellem folkeskolens og gymnasiets matematikundervisning. Man mærker at det, vi ovenfor har kaldt demokratiprægningen, spiller ind⁵:

“De ændrede forudsætninger indebærer, at der er en kløft mellem folkeskolens og gymnasiets undervisning. En kløft som uddybes år for år. Eleverne er fra folkeskolen vænnet til induktive forløb, hvor diskussionen af deres egne forslag spiller en væsentlig rolle. Mange undervisningsforløb i folkeskolen søger således at give eleverne en tro på dem selv. En tro på at deres egne forslag har værdi. Resultatet af denne undervisning er, at det er åbne og videbegærlige elever, som møder op til gymnasierne i 1.g.

Gymnasiets nuværende matematikundervisning udnytter kun i mindre udstrækning disse nye ressourcer hos eleverne. I stedet bygger vort undervisningsindhold på forudsætninger, som eleverne kun i ringe grad besidder.”



Figur 8. Procentdelen af en årgang i matematisk gymnasium fra 1900 til 2000.⁶

5 Citatet findes i indledningskapitlet i Hansen m.fl. (2008), hvor hele udviklingen af matematikundervisningen på de gymnasiale uddannelser behandles i bind II.

6 Tallene i tabel 1 er hentet fra Palle Bak Petersen og Søren Vagner (2003), tabel 1a s. 304.

Misforholdet mellem det, folkeskolen leverede, og det gymnasiet ønskede at bygge på, voksede i løbet af 1980'erne. Ifølge ministeriets rapport om *Matematik, Kvalitet i uddannelse og undervisning* (Undervisnings- og Forskningsministeriet 1990) var der klart faglige svagheder ved overgangen mellem institutionsniveauerne. Således var et væsentligt overgangsproblem efter 9. klasse elevernes:

“manglende sikkerhed i visse grundlæggende færdigheder. Der kan f.eks. peges på faglige begreber som ‘regningsarternes hierarki’, ‘overslagsregning’ og ‘bogstavregning’ (reduktion, ligninger, uligheder, m.v.)” (ibid., s. 36).

Rapporten peger her på områder, der tidligere var blevet brugt vældig meget tid på i grundskole og realafdeling, men som nu ikke fik samme opmærksomhed. Det gælder fx et felt som bogstavregning. Opgaven herunder er fra oprykningsprøven fra 2. realklasse i 1966, hvor den også blev brugt til 9. klasses teknisk forberedelseseksamen. Den er af en type, som i stigende grad blev udfaset, fordi den primært har relevans i relation til elevens videre uddannelse og forekommer mindre meningsfuld for folkeskoleeleverne i 9. klasse.

“Oprykningsprøve fra 2. realklasse april-juni 1966

1. Reducer hver af ligningerne

$$\frac{1}{x-y} + \frac{2}{x+y} = \frac{5}{2x^2 - 2y^2}$$

og

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) - \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{y}\right) = -\frac{1}{2xy}$$

og løs derefter det ligningssystem, der består af de to givne ligninger.

2. Tegn i et koordinatsystem de to rette linjer, der fremstilles af de reducerede ligninger.”

Forskellen på det, eleverne kunne, og det gymnasierne ønskede, at de skulle kunne, var altså tydelig i 1980'erne. I 1990 blev dr. pæd. Niels Egelund bedt om at undersøge, om konflikten skyldtes en direkte forringelse af folkeskolens afgangsprøve i forhold til den tidligere realeksamen. Hans rapport fra 1991 inddrager følgende karakteristik udarbejdet af fagkonsulent Ole Haahr:

“Forskellene mellem realeksamen og folkeskolens udvidede afgangsprøve i regning/matematik beror helt overvejende på en række væsentlige ændringer i prøvesættens opbygning ved de skriftlige prøver. Realeksamen bestod i regning og matematik af en række enkeltopgaver, som med klare signalord oplyste eleverne om, hvad der skulle foretages i den enkelte situation, fx løs ligningen, beregn ved hjælp af logaritmer, beregn rumfanget, tegn parabelen osv.”

Til sidst i rapporten konkluderes, at niveauet ikke er faldet:

“Påstande om, at folkeskolens udvidede afgangsprøve ligger på et lavere fagligt niveau end realeksamen, kan afvises. Der er tale om anderledes prøver, der er baseret på en anderledes undervisning, men niveauet er ikke lavere. Det er dog nogle helt andre elever, fra den “anden ende af spektret”, der tager den udvidede afgangsprøve. Det er i denne forbindelse bemærkelsesværdigt, at det lykkes at bringe så mange elever igennem til så højt niveau.” (Egelund 1991)⁷

Den foreløbige konklusion er altså, at matematik nok er blevet et fag for alle, men også at det er blevet et andet fag. Fra én synsvinkel kan det 20. århundrede beskrives som den periode, hvor matematikfaget blev demokratiseret og blev for alle. En mere kritisk læsning af udviklingen siger, at det er den periode, hvor matematikken i traditionel forstand blev afviklet som undervisningsfag.

I collagen i figur 2 viste vi dele af en avisdebat fra år 2000 om matematikundervisningen i Danmark. Den debat illustrerer, at vi gik ind i et nyt

7 Citaterne er taget fra kapitel 3 i Hansen m.fl. (2008). Kapitlet er skrevet af den tidligere fagkonsulent Ole Haahr og tidligere seminarirektor Hans Nygaard Jensen, der også har været en vigtig aktør på hele området med matematikundervisning fra 1970 til 2000. Så der henvises til dette kapitel for yderligere detaljer om udviklingen af faget i folkeskolen 1958-2000.

årtusinde med en vis spænding mellem et krav om vægt på fagets traditionelle dyder på den ene side og på den anden det nye matematikfag for de mange, som det fx er skildret i faghæftet fra 1995.

Man kan sige, at undervisningsministeriet i starten af det 21. århundrede har valgt at fastholde det moderne syn på matematikundervisning, men har præciseret og indskærpet målene gennem først *Klare mål* i 2001 og så *Fælles mål* fra 2003. Med de nationale test i 2007 markeres en lidt traditionel faglighed, selv om den måske i højere grad er et resultat af computertestningens indbyggede begrænsninger end af bevidste pædagogiske valg.

Der sker en revision af faghæftet for matematik i Danmark i 2008. Samspillet mellem mål- og indholdsbeskrivelserne og de tilhørende centralt leverede evalueringsinstrumenter og afgangsprøver vil stærkt påvirke, hvor faget bevæger sig hen i det kommende årti.

Det vil så vise, hvad svaret bliver på det spørgsmål, der afslutter illustrationen (figur 1) af bølgemodellen: Vender kurven igen?

OPSAMLING PÅ KAPITEL 12

Vi har i dette kapitel set på udviklingen i diskussionerne om matematikfaget i det 20 århundrede, specielt med henblik på forholdet mellem færdigheder og begrebsforståelse på forskellige tidspunkter. Vi har i den forbindelse beskrevet udviklingen med slagordet 'matematik for alle'.

Oplæg 4

Den væsentligste del af diskussionen i dette kapitel har taget udgangspunkt i formelle bestemmelser for faget, i lærebøger, og i andre diskussioner af fagets stilling. Det væsentligste er imidlertid, hvordan verden ser ud i de matematikklasserum, der danner ramme om elevernes læring.

Overvej og diskuter på baggrund af egne erfaringer med skolematerik, som elev eller som underviser, balancen eller den manglende balance mellem færdigheder og begrebsforståelser i matematik.

Oplæg 5

Hvis matematik virkelig skal være et fag for alle, kræver det naturligvis andet og mere, end at der står *matematik* på alles skoleskema. Hvis udtrykket *matematik for alle* skal give mening, kræver det derudover to ting. For det første skal undervisningen bearbejde indhold, der er god matematik og gøre det på måder, der er matematisk lødige. For det andet skal den gøre det, så eleverne engageres i noget, der for dem er eller kan blive en meningsfuld aktivitet. På den måde har diskussionen om matematik for alle en klar sammenhæng til det, Ball omtaler som undervisningens og lærerens dobbelte forpligtelse over for fag og for elever (jf. s. 191 ff.).

Overvej og diskuter på den baggrund balancen mellem færdigheder og begrebsforståelser i matematikundervisningen: Er det muligt, at undervisningen i tilstrækkeligt omfang respekterer fag såvel som børn, og hvad kræver det i givet fald.