10
HANS FREUDENTHAL OG REALISTISK MATEMATIKUNDERVISNING

Hans Freudenthal (1905-1990) kan med rette betragtes som matematikkens didaktiks grand old man. Han er uden tvivl en af de mest indflydelsesrige enkeltpersoner i matematikkens didaktik, måske den mest indflydelsesrige.

Freudenthal var oprindeligt forskningsmatematiker og professor i matematik, men blev stadigt mere optaget af didaktiske spørgsmål. I 1971 etableredes på hans initiativ i Utrecht i Holland et institut med navnet IOWO, *Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Oderwijs*, Institut for Udvikling af Matematikundervisning. IOWO har skiftet navn et par gange og blev efter Freudenthals død opkaldt efter ham. Siden instituttets oprettelse og altså længe før det kom til at hedde Freudenthal Instituttet[1], er der her udviklet et sammenhængende sæt af fagdidaktiske idéer, der med rette kan omtales som en fagdidaktisk skole. Denne fagdidaktiske retning omtales normalt som *realistisk matematikundervisning* eller ved den engelske forkortelse, *RME*, for *realistic mathematics education*. Ind imellem betegnes den blot som *den hollandske skole*.[2]

1 Freudenthal Instituttet har hjemmesiden www.fi.uu.nl. Her præsenterer de grundlæggende idéer og materialer. Der er også en række små computerprogrammer til undervisningen på forskellige skoleniveauer, som er lagt ud til fri afbenyttelse.

2 Vi refererer også andre steder i *Matematik for lærerstuderende* til Freudenthal og RME. I ϒ-bogen, kapitel 7 har vi en grundig diskussion af den måde, brøker behandles på i realistisk matematikundervisning ϒ-bogen, s. 265 ff.), og i denne bog i afsnittet om evaluering, hvor vi henviser til Heuvel-Panhuizen fra Freudenthal Instituttet (s. 353).

Hans Freudenthal – en kort professionel biografi[1]

Freudenthal blev født i Tyskland i 1905. Han læste matematik i Berlin og Paris og blev siden ansat ved universitetet i Amsterdam. Efter krigen blev han professor i Utrecht, hvor han arbejdede i resten af sin karriere. Her grundlagde han det institut, IOWO, som siden hans død har heddet *Freudenthalinstituttet*.

Freudenthal var matematiker, men blev meget optaget af undervisning. I 1956 blev han medlem af ICMI, den internationale matematikundervisningskommission, som han var præsident for fra 1967 til 1970. I den periode afholdtes den første *International Congress on Mathematical Education*[2]. Samtidig var Freudenthal en hovedkraft bag etableringen af et af de mest respekterede matematikdidaktiske tidsskrifter, *Educational Studies in Mathematics*.

Freudenthal markerede sig også på andre måder, ikke mindst ved sin skarpe kritik af det, der i 1960'erne kaldtes *den ny matematik* (jf. kapitel 13). Den ny matematik fokuserede på en aksiomatisk opbygning af skolematematik. Men en aksiomatisk fremstilling, sagde Freudenthal, er et slutpunkt for en lang matematisk proces. Ved at lægge undervisningen aksiomatisk an fratager man eleverne muligheden for at engagere sig i processen, og dermed for at involvere sig i matematik som en levende aktivitet. Man vender altså faget på hovedet ved at begynde med slutpunkterne.

Det var en gennemgående idé hos Freudenthal at sætte skolematematik på benene igen ved at engagere eleverne i faglige processer med udgangspunkt i en for dem virkelig verden. Det er den tilgang, der omtales som *realistisk matematikundervisning*.

I 2003 oprettede ICMI to priser for matematikdidaktisk forskning. Den ene blev opkaldt efter ICMIs første præsident, den tyske matematiker Felix Klein. Freudenthals store internationale betydning ses af, at den anden kom til at hedde Freudenthalmedaljen.

Freudenthal skrev også mange kronikker og andre bidrag til den offentlige debat om sprog, historie og politik. Ved hans død fandt man derudover en række noveller og digte, som han havde skrevet, men som aldrig var blevet offentliggjort.

Freudenthal døde d. 13. oktober 1990. Han blev fundet på en parkbænk af nogle legende børn.

---

1 Oplysningerne her stammer dels fra et hæfte, som Freudenthalinstituttet har lavet om sig selv, dels fra en upubliceret note, som professor Bent Christiansen skrev om Freudenthal umiddelbart efter hans død..

2 Disse *ICME-konferencer* afholdes nu hvert fjerde år og er de største matematikdidaktiske konferencer. ICME-10 blev organiseret af de nordiske lande i fællesskab og blev afholdt i København i 2004.

Vi citerede tidligere Freudenthal for, at matematik i højere grad må betragtes som en særlig mental aktivitetsform end som et genstandsområde (jf. s. 50). Med en anden formulering karakteriserede Freudenthal sit syn på matematik som en måde at forholde sig til verden på, en tilgang til løsningen af problemer: "Matematik ist in erster Linie eine Einstellung, eine Art Probleme anzugreifen" (Freudenthal 1980, s. 635). Den forestilling, der afspejles i de to formuleringers stærke procesorientering, løber som en rød tråd igennem Freudenthals omfattende forfatterskab og var ledetråd og vision for arbejdet ved IOWO. Den orienterer stadig arbejdet ved Freudenthal Instituttet.

RME er efterhånden et ganske omfattende og meget ambitiøst forsøg på at realisere den nævnte vision. Den overordnede teoretiske ramme er udviklet i samspil med mere konkrete bestræbelser, fx at arbejde med: at designe undervisning på en række specifikke faglige områder, at udarbejde mere overordnede og sammenhængende materialer til curriculumudvikling og at udvikle formative evalueringsstrategier, der er tro mod RMEs grundlæggende fagsyn (se også kapitel 9).

I dette kapitel skal vi se nærmere på Freudenthals tænkning og på RME mere generelt. Det er intentionen, at læseren efter endt læsning:

- Har en forståelse af centrale begreber i Freudenthal Instituttets arbejde, herunder af hvad der mere præcist forstås ved de tre bogstaver i forkortelsen, RME.

- Har udviklet en forståelse af, hvordan RME adskiller sig fra andre tilgange til matematikundervisning.

- Kan benytte RMEs begrebsapparat som analytisk værktøj i relation til bøger og andre undervisningsmaterialer og til praktisk undervisning.

Vi skal begynde vores rundtur i RME med at se på et eksempel.

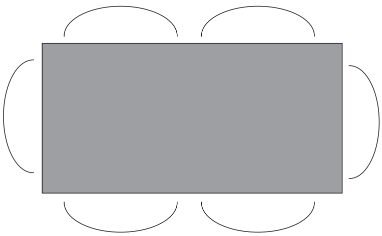
DIVISION I 3. KLASSE – ET EKSEMPEL

For at introducere Freudenthals tænkning om matematikundervisning ser vi på et konkret eksempel. Der er refereret til eksemplet flere steder i udgivelser fra Freudenthal Instituttet (fx Gravemeijer 1990, s. 14 ff.; van Galen & Feijs 1991, s. 185 ff.). Vi skal vende tilbage til det flere gange senere i kapitlet.

Eksemplet handler om en introduktion til arbejdet med division i 3. klasse. I den klasse, der refereres til, har de ikke hidtil arbejdet meget med division – i hvert fald ikke formelt set. Som et tidligt oplæg til det arbejde får de tegningen herunder med den tilhørende tekst (her i vores oversættelse).

Eksempel 1

I aften skal 81 forældre besøge skolen.
Der kan sidde seks forældre ved hvert bord.



Figur 1.

Hvor mange borde skal vi bruge?

Oplæg 1

Overvej og diskuter, om og evt. hvordan denne opgave adskiller sig fra andre, der kunne bruges til introduktion af division.

Overvej og diskuter – før I læser videre – hvad I betragter som sandsynlige eller mulige elevreaktioner på oplægget: Hvordan vil de løse problemet?

Eleverne i klassen reagerer naturligvis forskelligt på udfordringerne i oplægget. Selv om de snakker sammen om deres løsninger ved bordene, og løsningerne fra elever ved samme bord derfor i en vis udstrækning ligner hinanden, er der store forskelle. Strategierne i forbindelse med det første oplæg omfatter:

- At tegne borde op og skrive '6' i hver af dem og benytte gentagen addition for at se, hvornår summen kom over 81.

- At bruge lignende strategi, men tænke multiplikativt og at skrive $1 \cdot 6 = 6$, $2 \cdot 6 = 12$, osv. eller bare skiptælle med seks og notere 6, 12, 18, …

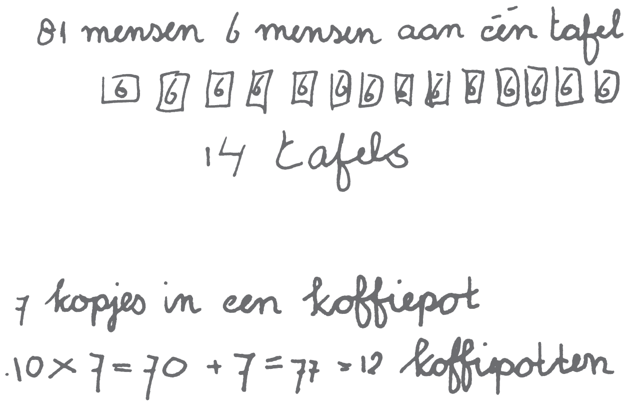
- At vide og benytte at $6 \cdot 6 = 36$, fordoble til $12 \cdot 6 = 72$ og derefter lægge først 6 og derefter 6 mere til.

- At bruge $10 \cdot 6$ som udgangspunkt og fortsætte derfra, enten additivt eller multiplikativt.

Elevernes forslag diskuteres i hele klassen, og det sidste af de nævnte – at benytte divisor ganget med 10 som udgangspunkt – bliver som resultat heraf efterhånden til det, vi (med reference til Cobb) har beskrevet som en fælles matematisk praksis med tilhørende antaget-fælles forståelser (jf. s. 142 ff.). Den antaget-fælles forståelse ser ud til at være, at man kan benytte multipla af divisoren – her antallet af pladser ved hvert bord – for at se, hvornår man første gang er kommet længere end til dividenden – her antallet af forældre. Den fælles matematiske klasserumspraksis er at benytte multipla af 10 som udgangspunkt og skiptælle videre derfra. Det ses allerede af elevernes respons på et opfølgningsoplæg til det, vi nævnte ovenfor. Her lyder spørgsmålet (i vores oversættelse): "I en kaffekande er der 7 kopper, og hver forælder får en kop kaffe. Hvor mange kander kaffe skal der laves til 81 forældre?' (ibid., s. 15).

Tretten ud af sytten elever i klassen bruger i forbindelse med dette oplæg $7 \cdot 10$ som udgangspunkt for at finde et svar og skiptæller derefter med 7 for at se, hvor mange ekstra kander, man behøver. En elevs respons på de to oplæg så således ud (Treffers 1991, s. 22[3]):

3 For en præsentation og diskussion af flere elevsvar, se van Galen & Feijs 1991, s. 187 ff.



Figur 2.

Oplæggene ovenfor og elevernes arbejde med dem adskiller sig på flere måder fra andre oplæg til det indledende arbejde med division. Der er i hvert fald to iøjnefaldende forskelle: Dels involverer divisionen den store tabel, og dels går den ikke op. Ingen af delene er standard i det første systematiske møde med division, og de kan ses som udtryk for den generelle tilgang til matematikundervisning i RME.

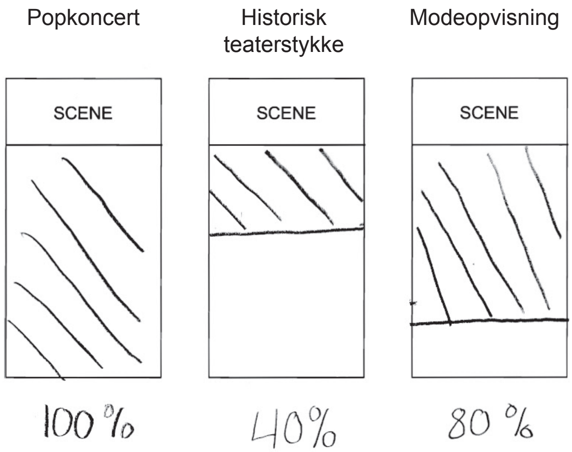
For nærmere at karakterisere denne tilgang skal vi diskutere andre aspekter af oplæggene som udgangspunkt for en diskussion af hvert af de tre bogstaver, R, M og E, i forkortelsen for Realistisk Matematikundervisning. Når vi her beskriver dem hver for sig, er det naturligvis ikke fordi, indholdet i R'et, M'et og E'et for RME er uafhængige af hinanden. Forståelsen af det realistiske, det matematiske og det undervisnings-/uddannelsesmæssige hænger således ganske nøje sammen. Men for at præsentere en forståelse af RME i sin helhed, har vi fundet det hensigtsmæssigt i første omgang at præsentere de tre elementer i forkortelsen hver for sig.

DET REALISTISKE I RME

I oplæg fra RME præsenteres en kontekst, som eleverne skal arbejde med. Konteksten giver en arena for elevernes aktivitet. I eksemplet er konteksten et forældremøde, dvs. en situation eller en verden, som de har et umiddelbart kendskab til eller en umiddelbar fornemmelse af. Selv om de ikke har adgang til 'mødet' – eller til andre forældremøder – så har de umiddelbare erfaringer med den sammenhæng, oplægget præsenterer. Det gør, at de næsten kan se sig selv som dem, der skal stille borde og stole op til deres forældre, den næste gang forældrene skal til møde på skolen. Så nok er det et fiktivt møde, men det er for eleverne ikke mere fiktivt, end at de kan gå til situationen som en forestillet virkelighed, som de har tilstrækkeligt med erfaringer med og viden om til, at det giver mening at tænke om og i den. De forventes at trække på deres erfaringer med konteksten i deres tilgang til oplægget.

Dette aspekt af oplægget relaterer til R'et i RME, til *det realistiske*. I dette eksempel betyder det en meget konkret virkelighed, som eleverne har erfaringer med. Det er det ofte i RME. Fx er det tilfældet med det eksempel om brøker i RME, som vi har præsenteret i ϒ-bogen (265 ff.). I brøktilfældet var den gennemgående sammenhæng et besøg i et pizzeria, hvor forskellige antal gæster sad ved borde og delte forskellige antal pizzaer. Også her var udgangspunktet for elevernes aktivitet en for dem realistisk situation i den betydning, at de har en hverdagsagtig erfaring med den.

En anden af medarbejderne på RME-projektet præsenterer en tilsvarende realistisk introduktion til procenter i en 5. klasse (Heuvel-Panhuizen 2003, s. 19). Her skal eleverne skravere, hvor mange de forventer, der kommer til forskellige forestillinger i den lokale teatersal (se figur 3). På baggrund af deres skraveringer skal de sige, hvor stor en procentdel af salen der er fuld, hvis helt fuld kaldes 100 %.



Figur 3.

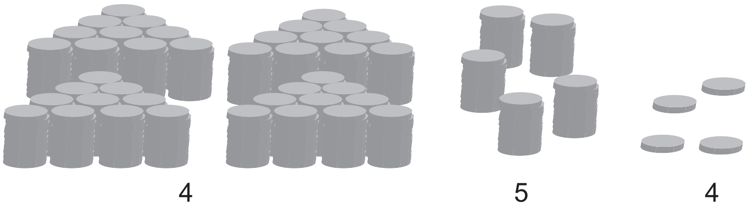
Og en tilsvarende betydning af 'realistisk' kan ses i Freudenthals forslag til introduktion af trigonometriske funktioner senere i uddannelsessystemet (Freudenthal 1991, s. 54). Forslaget er at undersøge bevægelsen af et hjul, der roterer, et pariserhjul måske. Her kan højden over jorden af et bestemt punkt (måske den vogn på pariserhjulet, man selv sidder i) repræsenteres grafisk som en funktion af tiden, og betydningen af fx diameteren og hastigheden for grafens udseende kan sættes til diskussion.

Freudenthal siger i sin sidste bog, at der er et simpelt svar på spørgsmålet om, hvad eleverne matematisk skal arbejde med: deres egen virkelighed (1991, s. 50). Men det 'realistiske' i RME skal ikke nødvendigvis opfattes så konkret som i eksemplerne ovenfor. Udgangspunktet kan i RME fx også være et eventyr eller en anden historie, der kan bruges til at etablere en sammenhæng, som eleverne kan forestille sig og leve sig ind i. Det kan det ikke mindst i de mindre klasser, hvor et oplæg kan referere til drabelige fortællinger om riddere og konger eller fabler om dyr og hekse. Det centrale er altså ikke, at udgangspunktet er 'realistisk' i en hverdagsagtig forstand. Oplægget skal præsentere en situation, som eleverne kan forestille sig og evt. se sig selv som en del af.

Det hollandske ord *realiseren*, som R'et i RME refererer til, kan betyde realisere eller virkeliggøre, men det kan også betyde at indse eller erkende (Hollandsk-dansk ordbog, København, Gyldendal, 2004). Det er den sidste betydning af ordet, der trækkes på i RME. I følge Heuvel-Panhuizen (2003) har den desuden medbetydninger af det engelske *imagine*, at forestille sig, et udtryk der har associationer af fantasi, oplevelse og fascination.

Pointen er her, at det realistiske i RME ikke betyder realistisk i den forstand, at det nødvendigvis skal handle om børnenes hverdagsliv. Det realistiske refererer til en levende, men evt. forestillet virkelighed for eleverne. Af eksempler fra RME selv og fra danske lærebøger, der er inspireret af RME, kan nævnes:

- Historien om en fårehyrde, der bruger sten til at holde styr på, hvor mange får han har. Til sidst kan hyrden ikke slæbe posen med sten, og han må finde på andre måder at repræsentere grupper af får på, fx én farvet sten for hver ti får. Det kunne være en 'realistisk' tilgang til undervisning i positionssystemet. Et tilsvarende indhold kan behandles med udgangspunkt i historien om en sultan, der har stakke af guldstykker, som han med mellemrum gerne vil have talt. Her kan sultanens tjenere stable guldstykkerne ti ad gangen og samle ti tier-stakke i hundreder, så de lettere kan tælle dem næste gang, sultanen spørger (Gravemeijer 1991, s. 70-71).



Figur 4. Sultanens guldmønter.

– Brugen af eventyret om Alice i Eventyrland. I eventyret skifter Alice størrelse mange gange. Det kan blive udgangspunkt for et arbejde på mellemtrinnet med målestoksforhold. Fx bliver eleverne bedt om at estimere Alice' højde ud fra et billede af hende selv sammen med en hund (Treffers 1991, s. 49).

– Fortællingen om sørøverkaptajnen, kaptajn Enøje, der er strandet med sit skib på en øde ø. Konteksten bruges som udgangspunkt for et indledende arbejde med geometri, bl.a. om måling. Således skal skibet fx have ny mast, og som måleenhed benyttes en skibsdreng (Salomonsen & Toft 2004, s. 24 ff.).

– Fra grænseområdet mellem fantasi og virkelighed, kommer en historie for 7. klasse om *LazerHouse*, en lazerskydebane som bruges til at introducere forståelse af synsvinkler (Andersen m.fl. 2004, s. 60 ff.).

Freudenthal beskrev en stor del af de 'anvendelser' af matematik, der forekommer i skolen, som relateret til 'a dead mock reality', dvs. til en død og forloren virkelighed (Freudenthal 1973, s. 78). I modsætning hertil, siger han, skal undervisningen tage udgangspunkt i en levende og gennemlevet verden, som det er en oplevelse for børn at gå på opdagelse i og som kan forbinde deres matematiske erfaringer indbyrdes: "The lived-through reality should be the backbone which joins mathematical experiences together" (ibid., s. 79).

Men ud over, at den realitet, der gerne skal benyttes, skal være levende for eleverne, så skal den også tjene et andet formål end i megen anden undervisning. Traditionelt er ikke-matematiske sammenhænge brugt i matematikundervisningen mhp. anvendelsen af begreber og færdigheder, som eleverne forventes at have udviklet på forhånd. Det gælder gennem hele skoleforløbet. I den indledende undervisning i de grundlæggende regneoperationer forventes eleverne således at lære 'at regne', for siden at kunne bringe deres færdigheder i spil i forhold til 'virkelige' problemstillinger. På mellemtrinnet har de skullet lære at operere med og på brøker med udgangspunkt i nogle få illustrationer, og først derefter har de skullet bringe dem i anvendelse. Og på de ældste klassetrin i grundskolen har de fx skullet arbejde med funktionsbegreber og funktionstyper, som de siden har skullet benytte til at beskrive 'den virkelige verdens' problemer med.

Men i alt det her forventes eleverne at lære matematikken først og at bringe den i anvendelse bagefter. Det er, siger Freudenthal, at vende tingene på hovedet, det er med hans egen formulering et udtryk for en *anti-didaktisk inversion*. Idéen hos RME er i stedet at begynde med et problem i noget, der har reel omverdenskarakter for eleverne, og lade dem systematisere egne og andres løsninger på problemet. Det er i sådanne systematiseringer, at matematikken for alvor ligger.

Der er endnu en kommentar til forståelsen af 'det realistiske' i RME. Efterhånden som eleverne udvikler deres matematiske forståelse, kan matematiske begreber få omverdens- og genstandskarakter på samme måde som andre begreber. Naturlige tal, regneoperationer og todimensionale geometriske former er kerneindhold i matematikundervisningen i de første skoleår. Det er altså begreber og færdigheder i relation til disse områder, som eleverne skal udvikle ved deres arbejde med konkrete kontekster. Men efterhånden forventes eleverne at udvikle fx talbegreber, der er så stærke og robuste, at tallene selv får nærmest genstandskarakter. Tallet 'tre' får så næsten samme konkrete eksistens som borde og stole og andre ting i elevernes fysiske omverden. Tallene selv bliver da en del af elevernes omverden og kan indgå i de kontekster, de kan undersøge og gå på opdagelse i (fx Freudenthal 1973, s. 133 ff.; 1991, s. 9). Når begreber om tal, regneoperationer og geometriske former bliver en del af elevernes omverden, en del af deres daglige sunde fornuft, kan de blive genstand for matematiske undersøgelser på et højere niveau.

For at illustrere tankegangen fra arbejdet med tal[4], så kunne opfølgningsspørgsmålet til det indledende oplæg med antal borde formuleres anderledes. På et senere klassetrin kunne spørgsmålet *Hvor mange kander kaffe er der brug for, når der er 7 kopper i hver?* være erstattet med fx:

Hvor mange kander kaffe er der brug for? Og det kunne følges op med spørgsmålet om *Hvad nu hvis der ikke var 81, men … forældre til møde?* Og *Er der antal forældre, hvor vi ville få netop pladser nok og netop kaffe nok, hvis der er 6 forældre ved et bord og 7 kopper kaffe i en kande? Og for hvilke antal kan vi ikke få nogen af delene?*

Der ville da ikke være tale om at forsøge at opbygge en indledende forståelse af division, men om at videreudvikle en forståelse af divisorer og primtal med udgangspunkt i en indledende forståelse af division. Og på den baggrund kunne man spørge:

Kan jeg finde en måde at finde primtal på? Hvordan kan man finde, hvor mange divisorer, der er i et tal?

Et andet eksempel fra arbejdet med tal kunne være:

Hvilke summer kan jeg få af to på hinanden følgende tal? Af tre på hinanden følgende tal? Er der tal, jeg overhovedet ikke kan få som sum af på hinanden følgende tal?

Og fra geometriens verden kunne man spørge:

Hvor meget længere skal jeg gå, hvis jeg går hele vejen rundt om en rundkørsel, end hvis jeg skrår tværs over? Hvor meget større kan jeg lave min rektangulære indhegning, hvis jeg får flere brædder? Hvor mange regulære polygoner findes der? Og kan jeg bruge nogen af dem til at lave et mønster, der fylder en flade ud? Hvilke mønstre af regulære polygoner kan fylde en flade ud?

Omverdenen er den verden, eleven kan agere i og forholde sig til. Efter-

---

4 Dette er ikke eksempler fra RME-medarbejdere, men vores forsøg på at eksemplificere tankegangen.

hånden som et matematisk indhold bliver konkret og nærmest får genstandskarakter, så kan det godt danne udgangspunkt for en for eleverne levende aktivitet.

De kontekster, der er udgangspunktet i realistisk matematikundervisning skal med vores tidligere formulering relatere til elevernes omverden. Omverdenen kan være dagligdags erfaringer. Den kan bestå af historier og andre eventyr. Og den kan være et matematisk område, som har fået en sådan karakter, at eleverne kan gå på opdagelse fx i tallenes verden. Det centrale er, at det felt, eleverne går i gang med at undersøge matematisk, skal være det, Freudenthal kalder "fraught with relations", det skal for de pågældende elever være ladet med relationer til elevernes liv.

DET MATEMATISKE I RME

Ligesom 'realistisk' i RME kræver en forklaring, så gør 'matematik' det også. Man kan få et indtryk af, hvad det betyder ved igen at se på det indledende eksempel.

Det er et karakteristisk træk ved oplægget, at eleverne skal gå til et oplæg af en slags, som de ikke tidligere har arbejdet med, og uden at de får grundige forklaringer på, hvordan de konkret skal behandle det. Eleverne har altså ikke fået forevist en metode, de skal bringe i anvendelse for at kunne håndtere den slags situationer, og deres opgave er derfor at gå i gang med noget, der for dem har problemkarakter (jf. s. 34). I det arbejde trækker de naturligvis på det, der er givet i oplægget såvel som på deres tidligere faglige forståelser og færdigheder. Den elev, hvis arbejde er vist tidligere (jf. s. 383-384), bruger således – i lighed med mange af de andre – tegningen af bordet som en ressource for at finde et svar på det første oplæg.

Imidlertid er opgaven ikke bare at finde et svar på det første spørgsmål. Det svar er kun interessant i den udstrækning, at eleverne ved at finde det kan tage de første skridt i en meget lang og dobbeltrettet læreproces.

For det første skal de med fornøden hjælp systematisere og forfine deres fremgangsmåder, så de kan genkende og håndtere lignende situationer lettere og med en anden og større grad af forståelse end oprindeligt. Opgaven er således, at eleverne ved at arbejde med en serie oplæg skal organisere og systematisere arbejdet med den slags situationer, så de udvikler en stadigt stærkere metode til at bearbejde divisionssituationer. Denne udvikling af stadigt bedre skriftlige notationsmåder, skemaer[5], kaldes i RME for *progressiv skematisering*. Idéen med at benytte multipla af 10 er et første skridt i den retning.

For det andet skal eleverne samtidig med, at de får mulighed for at udvikle en sådan metode, involveres i en problemløsningsproces, som også skal udvikles. De skal altså i processen blive stadig dygtigere til at organisere og systematisere deres egen aktivitet. I den proces kan de også udvikle en forståelse af, at det er lødig matematisk aktivitet at gøre netop det: at udvikle og forfine metoder til at håndtere kvantitative problemer med.

Matematisering

M'et i RME betyder matematik. Det følger af diskussionen ovenfor, at synet på matematik har et stærkt proceselement. Matematik er en aktivitet, en måde at arbejde på, og ordet matematisering bruges ofte for at påpege procesaspektet: at generere matematik er at matematisere kontekstproblemer. Mere præcist består faget af måder at systematisere og organisere ens erfaringer med at løse problemer, der har med fx tal, former og symboler at gøre (Freudenthal 1973, s. 123). Det omfatter blandt meget andet:

- at finde ligheder og forskelle på situationer og måder de kan behandles på,
- at generalisere spørgsmål, metoder og løsninger,
- at benytte symboler til beskrivelse og manipulation af fænomener,
- at udvikle definitioner,
- at videreudvikle metoder, så de får algoritmekarakter,
- at finde, forstå og forklare mønstre,

5 Det skemabegreb, der her er tale om, refererer til de måder at notere på, som eleverne udvikler i og vha. undervisningen. Det er altså et helt andet skemabegreb end det, von Glasersfeld skriver om, jf. kapitel 2.

– at udvikle og bruge formler,

– at bevise,

– at aksiomatisere.

Desuden er matematisering ikke bare en vej til at lære mere traditionel matematik. Den ses samtidig som et af de vigtigste, eller måske dét vigtigste potentielle udbytte af undervisningen. At facilitere elevernes matematiske læring er i vid udstrækning at støtte dem i at blive stadig bedre til at matematisere. Freudenthal siger i sin sidste bog, at selve processen med at genopfinde[6] matematik skal være rettet mod processer i mindst lige så høj grad som mod produkter. Den lærende skal altså genopfinde det at kunne matematisere snarere end bare genopfinde de matematiske produkter, det at kunne abstrahere snarere end bare matematiske abstraktioner, osv.:

> "The learner should reinvent mathematising rather than mathematics; abstracting rather than abstractions; schematising rather than schemes; algorithmising rather than algorithms; verbalising rather than language." (Freudenthal 1991, s. 49).

Med terminologien ovenfor var problemet for eleverne i de oplæg, vi har diskuteret nogle gange, at matematisere aspekter af forældremødet. Det stærkt procesorienterede i den formulering kunne forlede en til at tro, at produktsiden af faget nedprioriteres i RME. Det er dog ikke tilfældet. Tværtimod er det grundlæggende udgangspunkt, at procesorienteringen er nødvendig, hvis produkterne skal give mening, og hvis eleverne skal bruge produkterne med den grad af forståelse, der er hensigten. Således er det ikke tilstrækkeligt, at eleverne undersøger situationer, finder sammenhænge eller udvikler måder at gå til problemer på, hvis de ikke også udvikler færdighed og forståelse af centrale matematiske produkter. Vi skal illustrere den pointe ved at se på det fortsatte arbejde med division i den nævnte klasse.

6 Freudenthal m.fl. skriver genopfinde frem for opfinde, dels fordi elevernes opfindelser som oftest er ganske velkendte i matematikkens verden, og dels fordi læreren styrer elevernes genopfindelse frem mod solide etablerede matematiske produkter.

I arbejdet med den første opgave, hvor eleverne skulle finde ud af, hvor mange borde, der skal bruges, er der nogle elever, der tegner 14 billeder som det, der er i oplægget, dvs. billeder af bordet med alle stolene rundt om. Andre tegner kun bordene og bruger dem til at skiptælle. Atter andre skriver '6 + 6 + 6 + …' osv., indtil de når over 81. Og endelig er der – som nævnt – nogle, der regner videre fra $6 \cdot 10 = 60$. Disse metoder er stadigt mere avancerede, og vores tidligere pointe var, at der for mange elever var en progression i retning af at bruge multipla af 10. Men dermed slutter det ikke.

Det er på bare lidt længere sigt hensigten med det pågældende forløb, at eleverne udvikler deres forståelse af division samtidig med, at de udvikler en algoritme, der kan bruges til at finde resultatet. Ved brugen af multipla af 10, sker der det, at eleverne først trækker divisoren fra dividenden 10 gange i træk og ser, hvor meget der er tilbage. Derefter trækkes mindre multipla af divisoren fra, indtil resten er mindre end divisoren:

$81 - 10 \cdot 6 = 21$
$21 - 2 \cdot 6 = 9$
$9 - 1 \cdot 6 = 3$

En løbende fortolkning kan da dreje sig om, at det første linje betyder, at hvis der er 10 borde i brug, så er der 21 forældre, der mangler et sted at sidde. Hvis man henter to borde til, er der 9, der må stå op, med yderligere et bord til er der 3, der ikke kan sidde. Så i alt skal man have 10 + 2 + 1 + 1 = 14 borde. Det næste skridt i den fortsatte formalisering af division – her med samme eksempel – kunne se således ud:

$$\begin{array}{r|rl} 6 & 81 & \\ & \underline{60} & 10 \text{ borde} \\ & 21 & \\ & \underline{18} & 3 \text{ borde} \\ & 3 & \\ & \underline{3} & \underline{1 \text{ bord}} \\ & 0 & 14 \text{ borde} \end{array}$$

Figur 5.

Den algoritme kan også benyttes senere i forbindelse med større tal og bevare sin gennemskuelighed. Som eksempel på et senere oplæg nævner van Galen & Feijs (1991, s. 196) følgende (i vores oversættelse):

Fodboldklubben Feijenoord skal spille udekamp. Der er 1128 af fanklubbens medlemmer, der gerne vil med. De skal køre i busser med plads til 36 passagerer. Hvor mange busser skal de bruge?

En mulig løsning, der benytter samme algoritme som ovenfor, ser således ud:

36	1128	
	720	20 busser
	408	
	360	10 busser
	48	
	36	1 bus
	12	1 bus
	0	32 busser

Figur 6.

Oplæg 2

Sammenlign denne algoritme med andre, du kender. Hvad ser du som fordele og ulemper ved denne her?

Som det fremgår af eksemplet, så foregår arbejdet med at udvikle en stadigt bedre algoritme ved gradvise systematiseringer af elevernes foreløbige løsningsstrategier. Nogle elever begyndte med at tegne samtlige stole og tælle op, hvornår de havde nok borde. Derfra går det over gentagen addition eller skiptælling til brugen af multipla af 10 til en systematisering af de hidtidige erfaringer i en algoritme, der i høj grad er gennemskuelig, og som kan anvendes på flere forskellige niveauer. Med udgangspunkt i deres oprindelige uformelle måde at løse opgaven på udvikles der altså via nogle stadigt mere avancerede, præformelle skridt en bevægelse hen mod en formel tilgang til oplægget.

Denne gradvise udvikling i de skriftlige notationer er en bevægelse fra uformel over præ-formel til formel bearbejdelse af en kontekst. Den er et grundlæggende kendetegn ved RMEs tilgang til matematik, uanset hvilket niveau der arbejdes på. Denne bevægelse er således en central del af matematiseringen. Når Freudenthal således siger, at det (også) er matematiseringen, og ikke (bare) matematikken, eleverne skal genopfinde, er det ikke mindst gennemløbet af sekvensen uformel-præformel-formel, der er på tale. Det er den, eleverne skal blive stadig bedre til at gennemføre.

Pointen om, at den kontekst, der tages udgangspunkt i, også kan være af matematisk karakter snarere end fra omverdenen i sædvanlig forstand, kan så formuleres anderledes. Sekvensen uformel-præformel-formel kan på et højere niveau have udgangspunkt i et (formelt) resultat af den første sekvens. Når 'divisor' har fået omverdens- og genstandskarakter for eleverne, kan de med uformelle metoder undersøge divisorer på forskellig vis og benytte disse uformelle metoder til en ny sekvens fra uformel over præ-formel til formel matematik. Der kan således blive tale om cyklisk udvikling på stadigt højere niveauer.

Horisontal og vertikal matematisering

Vi har hidtil blot talt om en enkelt form for matematisering. Det var da også Freudenthals udgangspunkt, at der grundlæggende er én matematisk tilgang til verden, som bruges både på det grundniveau, der drejer sig om umiddelbare livserfaringer, og på højere niveauer, hvor der er tale om matematisk indhold i mere snæver forstand, som efterhånden har fået genstandskarakter. Det er altså matematisering både:

– Når eleverne i 3. klasse systematiserer måder, hvorpå de kan finde det antal borde, der skal bruges til et forældremøde.

– Når de nogle år senere skal lede efter måder at finde primtal på.

– Når man i læreruddannelsen kan arbejde med, hvilke tal der kan fås som sum af nogle på hinanden følgende tal.

Der er fællestræk i form af grundlæggende måder at systematisere og ræsonnere på, der er de samme i alle disse tilfælde, selv om det foregår på vidt forskellige niveauer.

Imidlertid udfordrede Adrian Treffers, som er en anden fremtrædende fortaler for RME, den forestilling, at man kunne klare sig med ét matematiseringsbegreb. Der er brug for en distinktion, sagde han, mellem en situation, hvor:

- Et omverdensproblem skal omformes, så det kan behandles med matematiske midler.

- Der arbejdes inden for det matematiske felt.

Fx er der i det indledende eksempel forskel på den strukturering af det indledende problem, der fører til, at eleverne overhovedet kan behandle situationen med tal, og på den senere videreudvikling af en metode, der bruger multipla af 10. Den første situation kalder Treffers for *horisontal matematisering*, den anden for *vertikal matematisering*. I det første tilfælde er udgangspunktet altså 'omverdenen', i den anden er den matematik.

Forskellene på elevernes aktivitet i de to situationer er ikke indlysende, og distinktionen mellem de to matematiseringsformer er derfor problematisk. Alligevel mener Treffers, at den kan berettiges, fordi den kan bruges til at italesætte væsentlige forskelle på undervisningssituationer, som det er svært at se forskel på uden en sådan distinktion (se næste afsnit).

Det er også af denne grund, at vi introducerer distinktionen her: Den kan gøre det muligt at tale om forskelle i undervisningsmæssig praksis, som det ellers kan være svært at få øje på. Imidlertid finder vi det vigtigt at ændre en smule på Treffers definition af de to matematiseringsformer, eller i hvert fald at komme med en præcisering.

Vi sagde i det forrige afsnit, at matematik kan blive en del af elevernes omverden på samme måde som mere konkrete dele af deres omgivelser. Matematiske begreber og metoder kan få genstandskarakter og blive til noget, man kan tale om og operere på på samme måde som andre dele af ens omverden. For definitionen af horisontal matematisering betyder det, at det problem, der skal omformes, godt kan være matematisk, hvis bare den matematik, der skal arbejdes med, har omverdenskarakter for de pågældende elever.

Forestil dig fx en elev, der efter det indledende forløb om division (jf. oplægget med forældremødet) har udviklet en forståelse af pointen med at bruge multipla af 10 for at løse multiplikations- og divisionsproblemer. Forestil dig også, at hun bliver præsenteret for en situation, hvor hun skal finde summen af 8 + 8 + … + 8, hvor der i alt er 12 addender. Hun vil da muligvis tænke noget i retningen af: *Ti ottere er 80, og så er det 88 og 96, det bliver 96.*

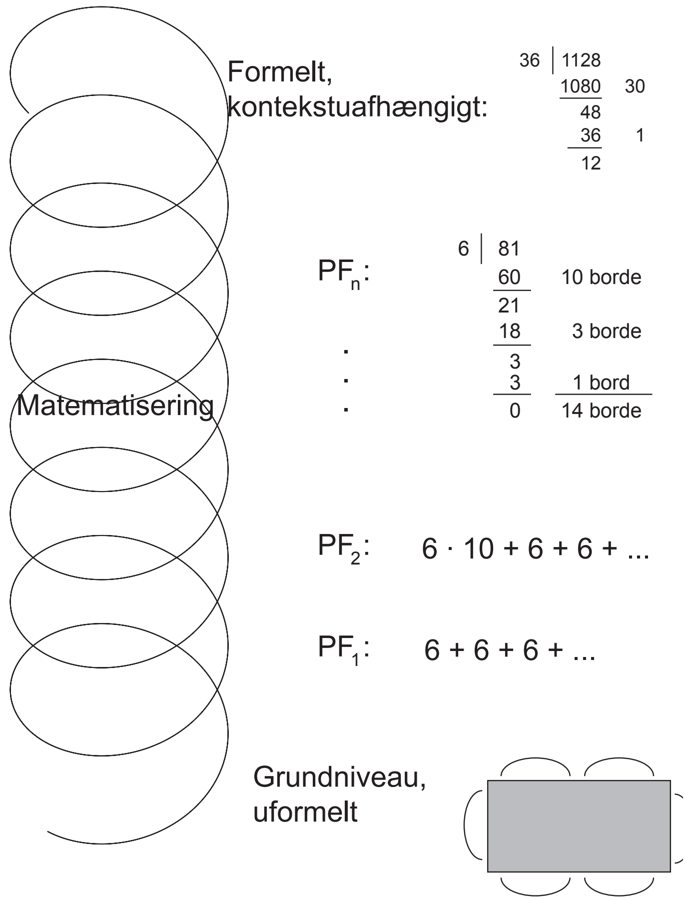
Det, eleven arbejder med i denne situation, har allerede omverdenskarakter for hende, selv om det er matematik: det er små naturlige tal og addition. Det, hun gør, er at bringe denne del af hendes omverden på en matematisk form, der også er kendt for hende: multipla af 10. Der er altså ikke tale om et niveauskifte i den faglige tilgang, men blot om at eleven bringer en standardprocedure i spil i forhold til noget, der for hende selv har omverdenskarakter.

I den terminologi, vi skal bruge, er der tale om en horisontal matematisering, når en elev – som i dette sidste eksempel – matematiserer en kontekst på et niveau, der i forvejen er en del af den pågældendes omverdensforståelser. Hvis man altså udelukkende behandler en kontekst med faglige metoder og begreber, der i forvejen har omverdenskarakter, er der tale om en horisontal matematisering, uanset om udgangspunktet er matematisk eller ej.

I modsætning hertil er der tale om en vertikal matematisering, når man prøver at indføre en kvalitativt anderledes måde at arbejde med eller forstå det pågældende problem. Som ordet *vertikal* antyder, så skal der være tale om et niveauskift i tilgangen til problemet.

Vi har illustreret tankegangen i figur 7. Hvis man opererer på et bestemt niveau (uformelt, præformelt eller formelt) er der tale om en horisontal matematisering. Hvis man rykker et niveau op, er der tale om en vertikal matematisering.

Det følger umiddelbart af denne forståelse af det horisontale og det vertikale, at man ikke som observatør af en matematisk aktivitet nødvendigvis kan afgøre, om der er tale om en matematisering af den ene eller den anden art. En elev, der benytter sig af multipla af 10 for at finde resultatet af en division, kan – som netop vist – være i gang med blot at benytte en metode, som hun allerede har gjort til sin egen. Hvis ikke selve metoden videreudvikles, eller hun kommer til at tænke anderledes om den i forbindelse med, at hun finder resultatet, er der tale om en overvejende horisontal matematisering. Men den elev, hvis arbejde vi så på tidligere (jf. s. 383-384), og som også benytter sig af multipla af 10, har tydeligvis omorganiseret sin tilgang i forbindelse med det andet oplæg. Hun har således i forbindelse med dette oplæg været involveret i en aktivitet med et stort vertikalt element.



Figur 7. Matematisering illustreret ved det gennemgående eksempel. Grundniveauet er elevernes uformelle tilgang til konteksten. PF betyder *præformel*, og angiver stadier på vejen fra det uformelle over det formelle virkelighedsnære til den formelt abstrakte.

Lad os illustrere distinktionen mellem horisontal og vertikal matematisering med endnu et andet eksempel.

Eksempel 2

Ida går i 1. klasse. Hun finder generelt summer af etcifrede tal ved at bruge konkrete materialer som udgangspunkt for en tæl-videre strategi fra det største tal. Det betyder, at hvis hun skal finde summen af 5 og 7, tæller hun to mængder af hhv. 5 og 7 kastanjer, centicubes, eller andet op. Dernæst lægger hun de syv lidt til side og tæller videre: *otte, ni, ti, elleve, tolv – der er tolv.*

I Idas klasse har de nu en tid arbejdet med 'tiervenner', dvs. talparrene som fx 1 og 9, 2 og 8, osv. På et tidspunkt skal Ida sammen med sidekammeraten, Nora, netop finde summen af 7 og 5. Da Ida sidder og kigger på sine centicubes, siger hun pludselig: *Men det er jo 3 og 2, og så er det 10 og 2, så er det 10, 11, 12, det er 12!*

Ida indfører her en omgruppering af den anden addend for at skabe ti. Det er en anden måde at systematisere opgaven på end før, og selv om der er tale om en situation med et meget konkret udgangspunkt – antallet af centicubes i de to dynger på hendes bord – er der derfor tale om en matematisering med et stærkt vertikalt element.

Vi sagde tidligere, at Freudenthal oprindeligt var skeptisk over for Treffers' distinktion mellem horisontal og vertikal matematisering. Imidlertid kom han efterhånden til at acceptere den, og han formulerede selv forskellen på de to former (Freudenthal 1991, s. 41 ff.). Ifølge Freudenthal drejer horisontal matematisering sig om at matematisere områder, der endnu ikke er sat på matematisk symbolform. I modsætning hertil er den vertikale matematisering et spørgsmål om at manipulere og videreudvikle noget, der allerede er på matematisk-symbolsk form.

Oplæg 3

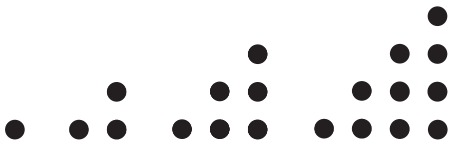
Overvej og diskuter, hvilke matematiseringsformer der med Freudenthals terminologi er på tale i eksemplet med eleven, der skal finde summen af 8 + 8 + … + 8, og siger *Ti ottere er 80, og så er det 88 og 96, det bliver 96.*

Oplæg 4

Overvej og diskuter, hvad der er forskelle og ligheder mellem Freudenthals definition af horisontal og vertikal matematisering og den, vi foreslår. I kan evt. benytte vores indledende eksempel med forældremødet på skolen som udgangspunkt.

Oplæg 5

I 7. A har de fået vist figuren her. Oplægget til aktivitet er, at de skal forsøge at finde mønstre og sammenhænge med udgangspunkt i udviklingen i antallet af prikker. Desuden skal de formulere deres svar på så mange forskellige måder som muligt.



Figur 8.

Løs opgaven. Giv jer tid, og udfordr jer selv og hinanden så meget som muligt.

Overvej og diskuter, hvordan der opstod elementer af horisontal og vertikal matematisering i jeres eget arbejde med oplægget.

Overvej og diskuter, om I forventer, at der opstår elementer af horisontal og vertikal matematisering for eleverne i 7. A.

Sigurd går i 7. A. Da han og hans gruppe har arbejdet med oplægget nogen tid, kalder han på sin lærer, dig, og siger: *Der bliver jo bare en flere hver gang … Er det det hele?* Kan du udfordre Sigurd og hans gruppe, så de engageres i en vertikal matematisering?

Oplæg 6
I 9. C arbejder de med eksponentiel vækst. De har fx set på befolkningsudviklingen i nogle u-lande og i den sammenhæng overvejet, hvorfor det ikke er det samme at lægge 4 % til ti gange som at lægge 40 % til én gang.

Et rimeligt fagligt mål for en sådan undervisning kunne være, at eleverne kan operere med et begreb om fremskrivningsfaktor. Formuler nogle præformelle skridt på elevernes vej til at kunne operere med et sådant begreb.

Konteksten, stofdidaktikken og de faglige produkter

De kontekster, der er udgangspunkt for undervisningen i RME, skal give eleverne masser af muligheder for at gå i gang med at matematisere, både horisontalt og vertikalt. Dvs. at eleverne skal have mulighed for at bearbejde noget, der for dem er 'omverdenen' med matematiske midler. I den proces skal de systematisere og forfine deres metoder, herunder stille nye faglige spørgsmål på baggrund af det, de har gjort. Der er heri et stort element af refleksiv aktivitet: De skal se på deres egne metoder, stille sig uden for dem og forsøge at forbedre dem.

Men en kontekst er ikke bare et udgangspunkt for elevernes engagement i refleksive matematiseringsprocesser. Den er også udgangspunktet for deres udvikling af stadigt mere veludviklede og generelt accepterede måder at behandle faglige spørgsmål på. M.a.o. skal matematiseringerne føre til, at eleverne udvikler stærke og fleksible faglige forståelser, der i så høj grad som muligt er i overensstemmelse med dem, der er standard på området. For at diskutere den side af sagen skal vi vende tilbage til den faglige sammenhæng for det gennemgående eksempel, dvs. til division.

Division er en regneoperation, der kan bruges i to forskellige sammenhænge, der begge er umiddelbart relateret til divisions rolle som den omvendte operation til multiplikation[7]. Den ene sammenhæng er ligedelings-

7 De forskelle, vi skal nævne her, har kun at gøre med de situationer, hvor der er forskel på de to faktorer i den pågældende multiplikation.

situationer, som når et antal enheder skal deles ligeligt fx mellem et antal mennesker. Hvis seks børn hver får fire småkager, så kan man finde det samlede antal småkager som en multiplikation: $6 \cdot 4 = 24$. Hvis man omvendt får at vide, at 24 kager skal deles ligeligt mellem 6 børn, kan man dele en ad gangen ud til hver og notere det som $24 : 6 = 4$. I dette tilfælde deler man altså det totale antal med multiplikatoren i gangestykket, dvs. med den faktor, der angiver, hvor mange gange, der skal tages 4 kager. Den erfaring, små børn har med den slags situationer, er typisk, at de deler en kage ud til hver, til der ikke er flere.

Den anden divisionssituation kan betragtes som en målesituation, som når man skal finde, hvor mange af en bestemt slags enhed der er i en bestemt mængde eller en bestemt størrelse. Hvis vi fx i stedet for eksemplet ovenfor så på en situation, hvor man skal putte fire kager i hver af seks poser, så ser multiplikationen ud som ovenfor, og man har brug for i alt $6 \cdot 4 = 24$ kager. Hvis man her omvendt får at vide, at der er 24 kager, der skal puttes i poser med fire i hver, kan man få svaret ved at lægge fire i den første pose, fire i den næste og så fremdeles til der ikke er flere kager. Det kan man notere som divisionen $24 : 4 = 6$. I dette tilfælde deler man med multiplikanden i gangestykket, dvs. med den faktor, der angiver, hvor mange kager, der skal tages ad gangen, hver gang man putter nogle i en pose. Når den division omtales som en måledivision, er det, fordi man bruger antallet i hver pose som måleenhed, og ser hvor mange gange man skal bruge den for at tømme den oprindelige mængde.

Oplæg 7

Find eksempler på en ligedelingsdivision og på en måledivision.

Det ses da, at vores gennemgående eksempel i dette kapitel er et eksempel på en måledivision: Mængden på 81 forældre skal måles med en enhed, der er det antal, der kan sidde ved et bord.

I mange sammenhænge vælger lærebogsforfattere og lærere at introducere division i ligedelingssituationer. Det sker ud fra en forventning om, at børn er mere bekendt med dem. Det er muligvis sandt, men det viser sig, at børn hyppigt efterfølgende har problemer med at genkende divisioner i målesituationer, hvis de overvejende har arbejdet med ligedeling, mens det omvendte sjældnere er tilfældet.

Det sidste skyldes, at ligedelingssituationen faktisk godt kan fortolkes som en målesituation, mens det omvendte er svært. I stedet for at tænke ligedeling som en situation, hvor man deler en ad gangen ud til dem, der skal have, kan man betragte det som en situation, hvor man måler, hvor mange gange, man kan dele en ud til dem hver. I det første eksempel ovenfor kan man således tænke, at i hver runde skal der deles 6 kager ud, og spørgsmålet er så, hvor mange gange man kan gøre det. Da bliver der tale om en måling med 6 kager som enhed for de i alt 24 kager.

Det er således ikke tilfældigt, at de i RME foreslår, at man i høj grad bygger sin undervisning i division op om måletilfælde. De kan komme til at omfatte ligedelingstilfældet, mens det omvendte ikke er tilfældet.

Som vi tidligere har gjort opmærksom på, så adskiller eksemplet med forældrene til møde på skolen sig også på endnu en måde fra de fleste introduktioner til division: denne division går ikke op. Det er ikke en tilfældighed, at RME har valgt en sådan division som udgangspunkt. Derimod er der også grundige overvejelser bag den kompleksitet, der indføres ved, at der er en rest af divisionen: Eleverne bliver nødt til at overveje, hvad der skal ske med resten, dvs. hvordan de kan finde plads til de sidste voksne, og hvor mange kander kaffe der så er brug for. Det er ikke svært i disse sammenhænge, og der er tilsyneladende ingen af eleverne, der har problemer med, at de skal skiptælle, til de kommer over 81, for at få pladser og kaffe nok.

Imidlertid har den rest, som divisionen ender med her en anden betydning end i andre divisionstilfælde. Division kan således optræde i en række forskellige situationer, hvor resten kan spille delvist forskellige roller (efter Gravemeijer 1991, s. 18). Det er fx tilfældet, hvis:

1) 81 forældre skal sidde ved borde med seks ved hvert. Hvor mange borde er der brug for?

2) 81 forældre skal placeres ved 6 borde. Hvor mange forældre skal der sidde ved hvert bord?

3) Et reb på 81 m skal skæres i stykker på 6 m hver. Hvor mange stykker kan man få?

4) Et reb på 81 m skal deles i 6 dele. Hvor lang bliver hver del?

5) 81 småkager skal deles mellem 6 børn. Hvor mange småkager kan de få hver?

6) 81 småkager skal puttes i poser med 6 i hver. Hvor mange poser kan der laves?

7) Du har 81 fliser til en rektangulær terrasse, hvor den en side skal være 6 m lang. Hvor lang kan den anden side være?

> **Oplæg 8**
> Find svarene til de syv situationer ovenfor, og overvej i hvert tilfælde, hvilken rolle resten har i divisionerne.

> **Oplæg 9**
> Overvej i hvert af de syv tilfælde, om situationen kan beskrives som en måledivision, en ligedelingsdivision, eller evt. som begge dele.

Divisionen 81 : 6 giver altså ikke altid 13,5, som den gør, hvis man bare regner på tallene. Derimod afhænger resultatet af den sammenhæng, som 81 : 6 er en matematisk fortolkning af. Det er en pointe hos RME, at kompleksiteten i de kontekster, eleverne arbejder med i forbindelse med division, gør, at de fra begyndelsen kommer til at overveje betydningen af en rest ved en division, og – mere generelt – at de kommer til at overveje, hvad sammenhængen betyder for fortolkningen af et resultat.

UNDERVISNING OG UDDANNELSE I RME

Det tredje bogstav i RME kræver, ligesom de to første, en uddybning. Igen skal vi vende tilbage til vores gennemgående eksempel.

Det er karakteristisk for RME, at det ikke i arbejdet med oplægget bare er læreren, der gradvist tager eleverne igennem den matematiseringsproces, det er at udvikle bedre og mere effektive metoder til fx antalsbestemmelse. I vid udstrækning er eleverne selv aktive i den proces, selv om læreren spiller en væsentlig rolle i at fremhæve, tilskynde og evt. introducere skridt på vejen, der kan føre til sådanne metoder. Det gælder ikke mindst med hensyn til den vertikale matematisering. Det er altså ikke bare læreren, der skal instruere i, hvordan man kan matematisere, eleverne skal selv involveres i det.

Denne idé om elevernes eget engagement i matematiseringsprocessen følger af Freudenthals syn på læring. Det er et syn, som han – lidt slagordsagtigt – har formuleret som, at "the best way to learn an activity is to perform it" (Freudenthal 1973, s. 110) – den bedste måde at lære en aktivitet på, er ved at udføre den.

Idéen om elevernes egen aktivitet gælder i forhold til begge de to aspekter af det faglige indhold, som vi har diskuteret ovenfor, dvs. både i relation til det konkrete faglige indhold og til matematiseringsprocessen mere generelt. De to oplæg om at finde det nødvendige antal borde og det nødvendige antal kaffekander til 81 forældre illustrerer begge aspekter. Det ene aspekt, det konkrete faglige indhold, er her indledende division. Pointen er, at eleverne skal involveres i at arbejde med et righoldigt udvalg af divisionssituationer, som de selv skal bearbejde, hvis de skal kunne udvikle en forståelse af, hvad division er, hvilke situationer det giver mening at bruge division i, og hvordan man konkret kan udføre en division. Det andet aspekt er matematiseringsdelen. Eleverne skal altså ikke bare lære division ved at arbejde med de to oplæg, de forventes også at lære at arbejde matematisk i den bredere betydning, der ligger i matematiseringsbegrebet.

I en dobbelt forstand skal undervisningen via elevernes aktivitet således skabe mulighed for elevernes *læring af matematisering*. På den ene side skal undervisningen gøre det muligt for eleverne at lære fagligt indhold – her division – af at matematisere. Her ses matematiseringen som form eller som undervisningsmetode, der skal tjene det formål, at eleverne kan lære traditionelt fagligt indhold med forståelse. På den anden – og mindst lige så vigtige – side skal læring af matematisering forstås som det at lære at matematisere, dvs. med matematisering som indhold.

Dette syn på læring fører – sammen med synene på det realistiske og på matematik – til et karakteristisk træk ved RMEs syn på undervisning. Det er opgaven for en lærebogsforfatter og for en lærer at udvikle oplæg til elevaktivitet, der åbner for muligheden af, at eleverne kan matematisere kontekster, der for dem er reelle. Samtidig skal konteksterne præsenteres i deres virkelige kompleksitet. Det sidste illustreres i eksemplerne fx af, at divisionerne ikke går op. Og desuden skal konteksterne vælges, så de i tilstrækkeligt omfang fører frem mod forståelser og færdigheder, der betragtes som centrale i faglig forstand.

Det er altså meningen, at elevernes uformelle måder at løse kontekstproblemer på gradvist og over en række præformelle skridt kan ende med den formelle matematik, dvs. med forståelser og færdigheder, der er i overensstemmelse med fagets standarder. Undervisning drejer sig om at støtte elevernes udvikling af sådanne forståelser med udgangspunkt i de nævnte kontekster. I den proces spiller læreren en særdeles aktiv rolle i sit valg af oplæg og sin interaktion med eleverne. Det er med Freudenthals ord et spørgsmål om at støtte eleverne i *guided reinvention*, guidet genopfindelse, af den formelle matematik.

Guided reinvention

Guided reinvention er altså RMEs betegnelse for den proces, hvorunder eleverne udvikler metoder og begreber, ved fortsatte matematiseringer af et omverdensfænomen under den vejledning, der kan etableres i undervisning. Den formelle matematik, dvs. den matematik, der i en vis forstand kan beskrives uden reference til kontekster, kan altså ifølge RME bygges ved en serie af relativt små skridt fra elevernes uformelle arbejde med en kontekst. Det er det, der sker, når eleverne gradvist og over lang tid udvikler den divisionsalgoritme, vi viste ovenfor. Og det er det, der sker, når de bliver stadigt bedre til at matematisere ved at gøre det med den støtte, der muliggøres af undervisning.

Det er underviserens og lærebogsforfatterens opgave at overveje, hvordan en sådan guided reinvention kan finde sted. Det er, som det er fremgået, en del heraf at finde eller formulere oplæg, der dels har omverdenskarakter for eleverne, og dels kan være udgangspunkt for horisontal og vertikal matematisering. Treffers (1991, s. 24 ff.) har formuleret fem aspekter af guided reinvention, hvoraf de nævnte er de to første:

1) At vælge udgangspunkter, der – for de pågældende elever – er så konkrete, at de har omverdenskarakter.

2) At støtte overgangen fra uformelle og kontekstafhængige løsninger til præformelle og sluttelig formelle løsningsmetoder og begreber.

Det forudsætter, at læreren er opmærksom på potentialerne i elevernes uformelle tilgange og løsninger af det oprindelige problem, og at de bruger dem som udgangspunkt for vertikale udfordringer. Desuden er det, siger Treffers, nødvendigt for elevernes læring, at de reflekterer over deres egne og andres løsningsforslag og konstant forsøger at forbedre dem.

Det tredje element af guided reinvention er således:

3) At eleverne stilles over for oplæg, der fordrer deres refleksion over egne og andres metoder, og som provokerer dem til at tænke fremad.

Treffers foreslår to metoder, der kan benyttes i den sammenhæng. Den ene er at benytte det, der hos RME hedder *free productions*, dvs. problemer og spørgsmål, som eleverne selv formulerer om det pågældende område. Eleverne kunne fx blive bedt om at give eksempler på en svær og en let division, at løse hver af dem på to forskellige måder, og at forklare hvad der gør dem lette og svære, og hvad der er forskellen på de to løsningsmetoder.

En anden måde at provokere refleksion på er at benytte det, Treffers kalder *konfliktproblemer*. Som eksempel på et konfliktproblem nævner han (i vores oversættelse): "To divisioner har begge resultatet *31 rest 12*. Er de to divisioner nødvendigvis ens" (ibid., s. 25). Oplægget forventes at føre til en diskussion af, at resultatet kan fx forekomme med divisoren 36, i hvilket tilfælde det numeriske svar – hvis et sådant giver mening – er $31\frac{1}{3}$, men hvis divisoren er 24 er resultatet $31\frac{1}{2}$.

Endvidere forudsætter guided reinvention, at eleverne ved siden af deres individuelle aktiviteter har mulighed for at diskutere med hinanden. De kan udfordre og videreudvikle hinandens forslag og frie produktioner. Det fjerde element af guided reinvention er derfor:

4) At der etableres muligheder for social interaktion mellem eleverne.

For eksempel kan de i forbindelse med oplægget om busturen for Feijenoords fanklub diskutere, i hvilke situationer en division med de nævnte tal ville give hhv. 31, 32 eller noget helt andet (jf. s. 394).

Og endelig forudsætter guided reinvention, at eleverne får mulighed for at opbygge forståelser af sammenhængende vidensstrukturer, snarere end bare af indbyrdes løsrevne vidensfragmenter. Det femte element i guided reinvention er derfor:

5) Forskellige indholdsområder må fra en start flettes ind i hinanden.

Denne sammenfletning gælder på to måder. For det første skal faget og dets ikke-matematiske anvendelser ikke ses som adskilte områder. Derimod må de nødvendigvis udvikles i tæt indbyrdes forbindelse med hinanden, jf. den tætte sammenhæng mellem horisontal og vertikal matematisering. Det betyder fx, at eleverne ikke først skal lære at dividere i en relativt mekanisk forstand og bagefter skal anvende division i forbindelse med ligedelings- og målesituationer. Derimod er praktiske målesituationer udgangspunkt for udviklingen af en forståelse af division.

For det andet gælder det, at forskellige faglige områder må behandles i tæt indbyrdes forbindelse med hinanden. Således at der må arbejdes med division i tæt sammenhæng med de andre grundlæggende regnearter. Men der kan også i vid udstrækning etableres forbindelser og sammenhænge på tværs af faglige hovedområder, fx på tværs af geometri og algebra.

Disse fem sider af guided reinvention er åbenlyst ikke uafhængige af hinanden. Tilsammen tegner de et billede af forsøg på at facilitere elevernes læring på måder, der tager deres egne aktiviteter som udgangspunkt for den faglige læring.

> **Oplæg 10**
> Treffers fem aspekter af guided reinvention er beskrevet i relativt generelle vendinger. Der er fx ikke mange forslag til, hvilke typer af spørgsmål man som lærer i en klassesamtale kan stille for at få eleverne til at reflektere over deres egne og andres metoder.

Overvej og diskuter, evt. med udgangspunkt i kapitel 6 og 7, hvilke typer af spørgsmål, man kan stille for at fremme en RME-undervisning.

I den pædagogiske litteratur henvises der ofte til *guided discovery* – guided opdagelse – som tilgang til matematikundervisning. Selve terminologien ligger tæt ved RMEs *guided reinvention*, men der synes dog at være en væsentlig forskel på guided reinvention og hyppigt anvendte fortolkninger af guided discovery.

Intentioner om, at eleverne skal arbejde med guided discovery, kan fx give sig udtryk i forsøg på at udvikle konkrete materialer, der i en vis forstand har de faglige forståelser i sig. Det kan være materialer til undervisning i positionssystemet (fx Cuisenaire-stænger) eller i geometri. Idéen er da, at eleverne ved at arbejde med disse materialer, der altså forventes at indeholde selve matematikken, kommer til at forstå de grundlæggende faglige sammenhænge.

Den form for undervisning har været udsat for nogen kritik. Det skyldes, at den rolle sådanne materialer spiller i undervisningen bedre kan forklares, hvis man lægger en anden synsvinkel på dem. De matematiske forståelser *er* ikke i materialerne, klar til at blive opdaget af eleverne. Derimod kan de *læses ind i* materialerne, hvis man kan se det i dem, man forventes at se. I denne fortolkning er Cuisenaire-stænger ikke bærere af forståelser af positionssystemet. Men hvis man ved, hvad positionssystemet er, kan man få øje på det i Cuisenaire-stængerne. Problemet med materialerne er således, at de til dels forudsætter, at man kan matematikken, før man kan få øje på den i materialet.

Forskellen til guided reinvention i RME bliver da klar. I RME er udgangspunktet ikke på forhånd udviklede materialer og symboliseringer, som eleverne skal opdage meningen med. Snarere skal de støttes i at genopfinde måder at symbolisere matematik på med gradvise forbedringer til følge.

Det betyder, at materialeudvikleren eller læreren skal forberede sin måde at agere på i forhold til elevernes læring på en anden måde end ved at udvikle materialer, der forventes 'at have matematikken i sig'. I stedet skal hun lave det, Freudenthal kalder det *pædagogiske tankeeksperiment* (1973, s. 100 ff.). På baggrund af en stofdidaktisk analyse – hvad er fx de centrale elementer i division – udvikles oplæg om kontekster, som eleverne kan tage udgangspunkt i. Der ligger en formel matematik som forventet resultat af undervisningen, og det pædagogiske tankeeksperiment består da i at overveje, hvad der kan være elevernes første og uformelle respons på oplægget, og hvad der er mulige veje fra denne første respons over stadigt mere avancerede præformelle forslag til den mere formelle matematik. I den praktiske undervisning må læreren have punkter på denne udviklingsvej i hovedet som orienteringspunkter for hendes ageren i forhold til elevernes arbejde, men hele tiden reagere og justere i forhold til det, der er elevernes input.

Forskellen til guided discovery – i hvert fald i en af dens varianter – er, at eleverne i RME ikke forventes at opdage matematik, der på færdig form og på forhånd er lagt ned i materialer og aktiviteter. Derimod er elevernes bidrag af afgørende betydning for den udviklingsvej, der tages, selv om den stadig er under vejledning: Det er en *guided* genopfindelse, der er tale om.

RME og andre tilgange til matematikundervisning

Vi sagde tidligere, at distinktionen mellem horisontal og vertikal matematisering kunne føre til måder at karakterisere og kategorisere tilgange til undervisning på. Det er det, Treffers bruger distinktionen til (Treffers 1987, s. 14 ff.; 1991, s. 27 ff.), og det er det, der er Freudenthals begrundelse for at acceptere distinktionen: Den kan sige noget vigtigt om de måder, undervisning gennemføres på. Det er også af den grund, at vi har gjort noget ud af distinktionen tidligere.

Treffers adskiller det, han kalder fire retninger i matematikundervisningen bl.a. på baggrund af analyser af lærebøger. Der er, siger han, en *empirisk*, en *mekanisk*, en *strukturalistisk* og en *realistisk* tilgang til undervisning i matematik. Det er den realistiske, vi har beskrevet hidtil i dette kapitel. Den er som vist præget af en stærk vægt på både horisontal og vertikal matematisering. De andre retninger vil vi sige lidt om her af to grunde. Dels kan beskrivelsen af forskellene mellem retningerne få den realistiske tilgang til at blive tydeligere og træde frem i relief på baggrund af de andre. Det betyder, at forståelsen af RME kan udbygges ved at se den i kontrast til andre syn på matematikundervisning. Dels kan Treffers distinktioner være af værdi, hvis man skal observere andres og ens egen undervisning eller analysere undervisningsmaterialer. Det gælder også, selv om underviseren eller materialet ikke bekender sig til RMEs syn på matematikundervisning. Treffers fire retninger kan da blive et analyseredskab i relation til praktisk undervisning.

Empirisk matematikundervisning er på overfladen kendetegnet ved nogle af de samme ting som den realistiske. Der tages normalt udgangspunkt i omverdensproblemer, der er særdeles konkrete. Det kan være indkøb, der skal gøres, værelser, der skal males, huse, der skal bygges, osv. Der er altså i hovedsagen tale om hverdagsmatematik med mulige relationer til fysiske, biologiske eller samfundsmæssige problemstillinger. Eleverne bearbejder sådanne problemstillinger med udgangspunkt i oplæg, der godt kan have en åben karakter. De forventes altså at gå til omverdensproblemer med matematiske virkemidler.

Eleverne forventes således i vid udstrækning at arbejde med horisontal matematisering. Til gengæld er der ikke store vertikale krav til eleverne. De udfordres ikke meget med henblik på at forfine deres metoder, og i det omfang standardmetoder får en plads i undervisningen, indføres de ofte som en lettere måde at løse det konkrete omverdensproblem på uafhængigt af elevernes foreløbige forsøg. Der er således ikke tale om at gå fra uformelle over præformelle til formelle løsninger. Formelle standardløsninger, dvs. løsninger der i princippet har en bred anvendelighed uafhængigt af konteksten, bringes i spil som 'en anden måde at løse det samme problem på'.

Mekanisk matematikundervisning er præget af en meget stor vægt på proceduremæssige færdigheder. Hvis man skal lære at dividere, så forevises en algoritme, som eleverne skal træne, og som de forventes at komme til at beherske. Bagefter anvendes algoritmen på en række forskellige divisionsproblemer i ligedelings- og målesituationer.

Eleverne forventes i en mekanisk undervisning ikke at engagere sig i hverken horisontal eller vertikal matematisering. Det er ikke set som deres opgave at organisere og systematisere selvstændigt arbejde, men i højere grad at overtage procedurer, der kan løse forelagte problemer. Eleverne *kan* undervejs udvikle forståelser af, hvorfor og under hvilke omstændigheder procedurerne virker. Men det vigtige er, at de kommer til at beherske dem.

I strukturalistisk matematikundervisning er der overvældende fokus på standardiserede faglige forståelser og metoder. Eleverne forventes at opbygge sådanne forståelser ofte med udgangspunkt i konkrete materialer, der forventes 'at have de faglige strukturer i sig'. Ved at manipulere med sådanne materialer i relation til det faglige indhold forventes eleverne at opbygge en forståelse af det faglige – ofte uden en tilknytning til elevernes øvrige omverden.

I en sådan undervisning forventes eleverne altså ikke at organisere og forbedre deres måder at gå til omverdensproblemer på. Sådanne omverdensproblemer findes stort set ikke, og undervisningen mangler derfor et element af horisontal matematisering. Til gengæld forventes eleverne at manipulere konkrete materialer og matematiske symboler på stadigt mere raffinerede måder, og der er således et stærkt element af ønsket om vertikal matematisering.

Treffers beskrivelse af retningerne i matematikundervisningen opsummeres i tabellen (Treffers 1991, s. 32).

	Horisontal matematisering	Vertikal matematisering
Mekanisk undervisning	-	-
Empiristisk undervisning	+	-
Strukturalistisk undervisning	-	+
Realistisk undervisning	+	+

En kategorisering af undervisning som den ovenfor har både fordele og ulemper. Den kan være med til at skabe overblik over en mangfoldighed, som det ellers er svært at overskue. Desuden kan den være et analyseinstrument i forhold til praktisk undervisning. Hvis man som lærer reflekterer over sin egen undervisning eller observerer andres, kan det være værd at overveje, om undervisningen har en tendens til at basere sig for ensidigt på en uhensigtsmæssig tilgang. Man kan da – i det omfang man finder det relevant – bruge distinktionen mellem retningerne til at spørge, om der er tilstrækkeligt med muligheder for horisontal og vertikal matematisering til rådighed for eleverne.

Ulempen ved en kategorisering som den ovenfor er, at den indbyder til en fortolkning af, at enhver undervisning kan placeres entydigt i netop en af de fire grupper. I praksis er situationen naturligvis langt mere kompleks end det. Det ændrer dog ikke ved, at kategoriseringen kan være et nyttigt værktøj, hvis den bruges med forsigtighed.

Oplæg 11

Beskriv en undervisningssituation eller et forløb, som I (eller nogle af jer) kender til som underviser eller observatør, fx fra praktikperioder. Hvilke materialer blev der brugt? Hvad gik elevernes faglige aktivitet ud på?

Anvend begreberne om horisontal og vertikal matematisering til at beskrive forløbet. Giver det mening at kategorisere forløbet som overvejende mekanisk, empiristisk, strukturalistisk eller realistisk?

Lav et pædagogisk tankeeksperiment om et forløb om det samme faglige indhold, hvor I forsøger at øge vægtningen af horisontal og/eller af vertikal matematisering. For at gøre det, skal I arbejde med hypotetiske læringsspor: Hvilke faglige forståelser skal undervisningen lede frem til for elevernes vedkommende, og på hvilke måder kan I støtte deres arbejde med matematisering, både som mål og som metode?

OPSAMLING PÅ KAPITEL 10

RME betyder *Realistic Mathematics Education*. E'et står for *education*. Hvis det oversættes til undervisning, som i den almindelige danske oversættelse af RME, Realistisk Matematikundervisning, får det de betydninger, som vi har gjort rede for tidligere. Det er da lærerens opgave at facilitere såvel elevernes engagement i matematiske aktiviteter med udgangspunkt i 'realistiske' kontekstproblemer som deres opbygning af formel matematisk viden og kunnen ved systematisering af deres egne oprindelige uformelle tilgange til og løsninger af problemerne.

Education kan imidlertid ikke bare oversættes med undervisning, men også med *uddannelse*. Således oversat betegner RME en overordnet tilgang til uddannelse i matematik, en tilgang der kan samles op i begreberne om det realistiske, om matematik og om undervisning, som vi har beskrevet dem ovenfor.

Det dominerende træk ved Freudenthal og RME er vægten på matematik som en tilgang til verden, som en måde at gå til problemer på. Det kommer stærkt til udtryk i vægtningen af matematisering af såvel den umiddelbare omverden som af matematikken selv. De to typer af matematisering, den horisontale og den vertikale, er altså udtryk for måder at arbejde matematisk med verden på. Matematisering er derfor et indhold i undervisningen, idet det er det, eleverne skal lære: at blive bedre til at matematisere.

Men samtidig med, at matematisering er et indhold i undervisningen, er det en metode. Det er det i den dobbelte forstand, at den eneste måde, man kan lære at matematisere på, er ved at gøre det. Men det er det også, fordi matematisering af omverdenskontekster kan gøre, at eleverne lærer det faglige indhold – i en lidt mere traditionel forstand – med en større grad af forståelse og med mindre risiko for fejlfortolkninger end ved en undervisningsform, der i højere grad introducerer færdigudviklet formel matematik.

Udgangspunktet for enhver matematisering er en kontekst. Konteksten er, siger Freudenthal, det domæne af verden, der tilbydes eleverne som udgangspunkt for en matematisering. Men konteksten er ikke bare en indpakning af selve matematikken, en slags støj i forhold til den egentlige besked, matematikken selv. Konteksten *er* beskeden, og matematikken er en måde at afkode den på (Freudenthal 1991, s. 75). Den er en måde at forstå og beskrive verden på. Det er det, eleverne skal lære, når de matematiserer.

Oplæg 12

Vi er i gennemgangen af RME gået analytisk til værks. Vi har delt realistisk matematikundervisning i tre dele, relateret til hver sit bogstav i RME og beskrevet de tre dele hver for sig.

Jeres opgave er at udvikle en samlet forståelse af RME på den baggrund. Dvs. at I hver for sig og i fællesskab skal forsøge at danne jer et overblik over RME i sin helhed. Det kunne I fx få brug for i kommunikation med forældrene. Det kan foregå på en af de følgende måder:

1) Skriv en præsentation på 3-4 sider, hvor du præsenterer en samlet vision for skolematematik ifølge RME. Den kan fx have form af et overblik over de centrale problemstillinger og tilgange i realistisk matematikundervisning eller det kan være et causeri over en reel eller forestillet undervisningssituation, som I stiller spørgsmålstegn ved med udgangspunkt i RMEs forståelser og begrebsdannelser.

2) Forestil jer, at I på en forældreaftenfor alle skolens forældre er blevet bedt om at fortælle om matematikundervisning med udgangspunkt i RME. Overvej og diskuter hvad I ville vælge at fortælle om og lav et udkast til de noter, I ville støtte jer til under oplægget.