Forslag til besvarelser af opgaver m.m. i ε-bogen,
Matematik for lærerstuderende

Dette er førsteudgaven af opgavebesvarelser udarbejdet i sommeren 2008. Dokumentet indeholder forslag til besvarelser af de fleste matematikfaglige opgaver i Epsilon og nogle undersøgelser. Svarmulighederne til de fagdidaktiske opgaver er så brede, at vi har undladt at foreslå besvarelser hertil.

Hvis du mangler noget i besvarelserne eller opdager fejl, foreslår vi, at du koordinerer dette med dit matematikhold og lader jeres lærer sende informationerne til en af forfatterne.

1. Børns talbegreber og regneoperationer omkring de første skoleår

Ingen forslag til besvarelser.

2. Matematiske teorier for naturlige tal

Opgave 2
$8 + 3 = 8 + e(2)$. Hvis vi benytter regel 2 i definitionen, får vi $8 + 3 = 8 + e(2) = e(8 + 2)$. Så mangler vi at bestemme $8 + 2$.

Som ovenfor kan vi omskrive $8 + 2 = 8 + e(1) = e(8 + 1)$, og problemet er nu at finde $8 + 1$, men
$8 + 1 = e(8) = 9$, og vi får derfor $8 + 2 = e(8 + 1) = e(9) = 10$.
Og derefter $8 + 3 = e(8 + 2) = e(10) = 11$.

Opgave 5

I. Vi viser først, at kommutativiteten er opfyldt for addition af 1, altså at der for alle naturlige tal a gælder:

$a + 1 = 1 + a$

Dette vises pr. induktion, altså fra en ende af (formelt under anvendelse af aksiom 5).

1) Det gælder for $a = 1$, thi $1 + 1 = 1 + 1$, da der står det samme på hver side

2) Lad os nu antage, at det gælder for en givet tal a, altså at $a + 1 = 1 + a$. Dette kalder vi vores induktionsantagelse. Vi vil så vise, at det også gælder for efterfølgeren $\mathrm{e}(a)$ til a. Vi vil altså vise, at $\mathrm{e}(a) + 1 = 1 + \mathrm{e}(a)$. (Obs. Vi beviser det for afvekslingens skyld på en lidt anden måde end i hintet i teksten).

$\mathrm{e}(a) + 1 =$ pr. definition 1.1 af '+'
$\mathrm{e}(\mathrm{e}(a)) =$ igen pr. definition 1.1 af '+'
$\mathrm{e}(a + 1)$

På den anden side har vi:
$1 + \mathrm{e}(a) =$ pr. definition 1.2
$\mathrm{e}(1 + a) =$ pr. induktionsantagelse
$\mathrm{e}(a + 1)$

Vi har nu vist det ønskede, nemlig kort skrevet, at $\mathrm{e}(a) + 1 = 1 + \mathrm{e}(a)$, da begge er lig med $\mathrm{e}(a + 1)$.

Alt i alt har vi vist, at $a + 1 = 1 + a$, gælder for tallet 1, og at denne kommutative egenskab nedarves fra et givet a til efterfølgeren $\mathrm{e}(a)$. Det følger herefter af Peanos aksiom 5, induktionsaksiomet, at egenskaben gælder for alle a.
Det gælder derfor, at addition af 1 til a er kommutativ: $a + 1 = 1 + a$.

II. Vi lader nu a være et vilkårligt, men fastholdt naturligt tal, og lader b være det variable tal, og vil ved et tilsvarende induktionsbevis efter b bevise, at der altid gælder, at $a + b = b + a$.

1) Vi har netop vist, at denne egenskab gælder for $b = 1$.

2) Vi antager nu, at det for et eller andet b gælder, at $a + b = b + a$ *(induktionsantagelsen).* Og vi skal bevise, at e(b) også har egenskaben, altså a + e(b) = e(b) + a.

$a + \mathrm{e}(b) =$ ifølge definition 1.2
$\mathrm{e}(a + b)$

og

$\mathrm{e}(b) + a =$ ifølge definition 1.1
$(b + 1) + a =$ da + er associativ jf. sætning 1
$b + (1 + a) =$ da vi lige har vist, at + er kommutativ ved addition af 1
$b + (a + 1) =$ ifølge definition 1.1
$b + \mathrm{e}(a) =$ ifølge definition 1.2
$\mathrm{e}(b + a) =$ ifølge induktionsantagelsen
$\mathrm{e}(a + b)$

Da højre og venstre side giver det samme, har vi nu bevist, at a + e(b) = e(b)+ a. Hermed har vi vist, at $a + b = b + a$ er sandt for $b = 1$, og at denne kommutative egenskab nedarves fra et b til efterfølgeren e(b). Ifølge induktionsaksiomet (Peanos femte aksiom) gælder det derfor for alle naturlige tal b, at $a + b = b + a$. Og a var fra starten af et vilkårligt naturligt tal, så det gælder altså generelt for ethvert valg af såvel a som b.

Opgave 8

Man kan bede de studerende om at sætte sig ned og lade være med at sidde flere på hver stol. Hermed etableres en injektiv afbildning fra mængden af studerende til mængden af stole. Hvis der så viser sig at være ubesatte stole, så er afbildningen klart ikke surjektiv, og ifølge vores definition på færre end (definition 5) er der færre studerende end stole.

Hvis vi skal afgøre det, før de studerende komme ind i lokalet og stadig vil være tro mod vores definition 5, så kunne vi lave følgende afbildning fra mængden af stole til mængden af studerende. Vi nummererer stolene fortløbende fra 1 og opad. Ligeledes med de studerende. Funktionen knytter så stolen med nummer 1 til den studerende med nummer 1, stolen med nummer 2 til den studerende med nummer 2 osv. Vi kan hurtigt afgøre, hvilken vej denne afbildning ikke vil være surjektiv. Det er altså blot en dybere måde at anvende tællemetoden på. Den mængde, der optælles til det største tal i tælleremsen, har også flest elementer.

Lad f være afbildningen, der til ethvert primtal p i [300,400] knytter tallet $p - 1$. Da dette tal er lige er det sammensat. Denne klart injektive afbildning rammer dog ikke alle sammensatte tal, idet 400 ikke rammes. Når der således findes en injektiv, men ikke surjektiv afbildning fra mængden af primtal til mængden af sammensatte tal, så er der pr. definition 5 tale om, at der er færre primtal end der er sammensatte tal.

(Primtallene mellem 300 og 400 er: 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397. Der er altså 16 sådanne primtal. Dermed er der 84 sammensatte tal i intervallet, altså er det rigtigt, hvad vi skriver).

Taflet klarer vi nemt, hvis vi kan se, at der er en dessertgaffel ved hver kuvert, og der også er et portvinsglas ved hver kuvert. Hermed etableres en bijektion fra mængde af dessertgafler til mængden af kuverter og herfra til mængden af portvinsglas. Den sammensatte funktion bliver en funktion fra mængden af dessertgafler til mængden af portvinsglas. (Læseren bedes bære over med, at vi således problematiserer det helt elementære, men det er missionen med dette kapitel).

Opgave 11

6 – 3

Kald resultatet af 6 – 3 for a. Da gælder i følge definitionen, at $a+3=6$. a er altså det tal, vi skal lægge 3 til for at få 6. Prøver vi efter ved at skyde på nogle tal eller ved at tælle, finder vi, at $a = 3$. Hvis vi går helt ned til definitionerne, kan vi beregne 3 + 3 som

e(2) + 3 = e(2 + 3) = e(5) = 6.

6 : 3

Kald resultatet af 6 : 3 for a. Da gælder i følge definitionen, at $a \cdot 3=6$. a er altså det tal, vi skal gange 3 med for at få 6. Prøver vi lidt efter, finder vi hurtigt, at $a = 2$.

Hvis vi går helt ned i definitionen er

$2 \cdot 3 = e(1) \cdot 3 = 1 \cdot 3 + 3 = 3 + 3 = 6$, og altså skal vi gange 3 med 2 for at få 6.

$(a+b)-b=a$. For at vise dette skal vi ifølge definitionen vise, at $(a + b) = a + b$, hvilket er sandt.

$(a \cdot b) : b = a.$ For at vise dette skal vi ifølge definitionen vise, at $(a \cdot b)= a \cdot b,$ hvilket er sandt.

Opgave 12
$(a:b):c = a:(b \cdot c)$
Kalder vi $(a:b):c$ for *z*, fortæller definition 8.2, at $(a:b) = z \cdot c$. Bruges definition 8.2 endnu engang fås, at $a = z \cdot c \cdot b$. Multiplikation er associativ og kommutativ, så vi kan tillade os i stedet at skrive $a = z \cdot (c \cdot b) = z \cdot (b \cdot c)$, hvilket pr. definition af division (8.2) betyder, at $a:(b \cdot c) = z$. Derfor er $(a:b):c = a:(b \cdot c)$, idet de begge er lig *z*.

$a:(b:c) = (a:b) \cdot c$
Som i bogens bevis for den analoge regel med – vil vi her gange på begge sider af lighedstegnet med (*b* : *c*).

Venstresiden bliver så $a:(b:c) \cdot (b:c) = a$.
Højresiden er dermed $(a:b) \cdot c \cdot (b:c) = (a:b) \cdot (b:c) \cdot c = (a:b) \cdot b = a$,
og da de begge er lig *a*, er den oprindelige lighed også sand.

Opgave 15
$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$ så $\frac{2}{3}$ er nummer 8 på listen.

Hvornår kommer vi til $\frac{117}{201}$ – en brøk med sum af tæller og nævner på 318?
Denne brøk vil efter systematikken ovenfor være den 117. brøk i opskrivningen af brøker med tæller + nævner = 318. Vi mangler blot at finde ud af, hvor mange brøker vi har skrevet, inden dem med tæller + nævner = 318 dukker op.
Der er 1 brøk med tæller + nævner = 2
Der er 2 brøker med tæller + nævner = 3
Der er 3 brøker med tæller + nævner = 4
.
.
.
Der er 316 brøker med tæller + nævner = 317.
Derfor har vi skrevet 1 + 2 + 3 + ... + 317 = 50.403 brøker, inden vi går i gang med dem, hvor tæller + nævner = 318.

$\frac{117}{201}$ er derfor nummer 50.403 + 117 = 50.520 på listen, hvis det ikke var, fordi vi vil undgå at tælle brøker, der angiver samme rationale tal med to gange. Så konklusionen er, at vi når frem til brøken $\frac{117}{201}$ senest, når vi har talt 50.403 brøker op.

3. Positionssystemer og regnealgoritmer

Opgave 2

a = 111101

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	1
$1·2^5$	$1·2^4$	$1·2^3$	$1·2^2$	$0·2^1$	$1·2^0$

$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 61$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\
 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 \\
- & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Opgave 6

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & & 4 & 3 & 2 & 4 \\
+ & & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle 10} & \\
 & \cancel{2} & 2 & 4 \\
- & 1 & 4 & 3 \\
\hline
 & & 3 & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 4 & 3 & 2 & 4 \\
- & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Opgave 9

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & {\scriptstyle 2} & {\scriptstyle 3} & & & & & \\
 & & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 2} & & & & & \\
 & & {\scriptstyle 1} & 3 & 2 & 4 & \cdot & 1 & 4 & 3 \\
\hline
 & {\scriptstyle 1} & 2 & 0 & 3 & 2 & & & & \\
 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & & & & \\
 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & & & & \\
\hline
1 & 1 & 4 & 0 & 4 & 2 & & & &
\end{array}
$$

Opgave 12
Som man kan se i to-tabellen i base V er lige tal repræsenteret både med ulige og lige slutciffer. Det er derfor ikke nemt at afgøre om 2 går op i et tal opskrevet i base V.

$5_X = 10_V$, og det er derfor nemt at afgøre, om det går op i et tal skrevet i base V. det sker netop, når tallet slutter på 0.

4. Elevers opfattelse af og regning med flercifrede tal

Til dette kapitel er der ikke forslag til opgave besvarelser.

5. Talteori

Opgave 3

Det ser ud som om $\frac{x}{\pi(x)}$ stiger med ca. 2,3 hver gang. Derfor er det bedste bud, at $\frac{10^{13}}{\pi(10^{13})} = 28{,}9$ så $\pi(10^{13}) \approx 10^{13} : 28{,}9 \approx 346.020.761.246$. På hjemmesiden http://primes.utm.edu/howmany.shtml kan man finde det præcise antal 346.065.536.839.

Opgave 7

Hvis x er den alder Diophant opnåede, kan oplysningerne oversættes til

Barndom $\frac{1}{6}x$

Ungdom $\frac{1}{12}x$

Voksen og ugift $\frac{1}{7}x$

Gift og barnløs 5

Indtil sønnen dør $\frac{1}{2}x$

Herefter lever han i yderligere 4 år.

$$x = \tfrac{1}{6}x + \tfrac{1}{12}x + \tfrac{1}{7}x + \tfrac{1}{2}x + 5 + 4$$
$$x = \tfrac{25}{28}x + 9$$
$$\tfrac{3}{28}x = 9$$
$$x = 84$$

Opgave 10

1) Der er $3 \cdot 4 = 12$ divisorer.

2) De 8 divisorer er $p^0q^0r^0$, $p^1q^0r^0$, $p^0q^1r^0$, $p^0q^0r^1$, $p^1q^1r^0$, $p^1q^0r^1$, $p^0q^1r^1$ og $p^1q^1r^1$.

3) Divisorer i p^n er 1, p, $p^2, ..., p^{n-1}$, p^n – dvs. i alt n + 1 divisorer.

4) Overlades til læseren.

5) Fra punkt 4 ved vi, at $p^x \cdot q^y \cdot ... \cdot r^z$ har $(x+1)(y+1)\cdot ... \cdot (z+1)$ divisorer når p, q, ..., r er primtal. $(x+1)(y+1)\cdot ... \cdot (z+1)$ kan kun give 11 hvis alle faktorer på nær én er 1 og den sidste er 11. Derfor må det eftersøgte tal være et primtal opløftet i 10 potens.

2^{10} = 512 og der er således ikke 'plads' til større primtal opløftet i 10 potens. Det eftersøgte tal er derfor 512.

6. Talmønstre og figurrækker

Opgave 4

Summen af de første n naturlige tal $S(n)$.

Da $S(n+1)=1+2+...+(n-1)+n+(n+1)=S(n)+n+1$ har vi en rekursiv formel for talfølgen $S(n+1)=S(n)+n+1$.

Opgaven postulerer, at vi kan finde $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, og vi skal bevise dette pr. induktion.

I. Første skridt er at vise, at formlen er korrekt, når $n = 1$.

$S(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$, hvilket er summen af det første naturlige tal.

II. Vi antager nu, at formlen gælder for tallet n, altså at vi kan beregne summen af de første n naturlige tal som $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, og så skal vi bevise, at formlen også gælder for nummer $n + 1$.

Hvis vi sætter $n + 1$ ind i formlen, får vi

$S(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)=$

$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$.

Vi skal altså ud fra $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$ prøve at bevise $S(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$.

Det eneste, vi ved med sikkerhed, er, at vi kan beregne $S(n+1)$ ud fra sammenhængen $S(n+1)=S(n)+n+1$. Da vi har antaget, at $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, kan vi beregne $S(n+1)$ til

$S(n+1)=S(n)+n+1=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1=$

$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n+1=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

Så det lykkedes os at bevise $S(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$. Det sidste udtryk er det samme som formlen gav, og der er derfor overensstemmelse mellem det formlen fortæller og den rekursive sammenhæng, og induktionsbeviset er fuldført, idet vi nu kan anvende induktionsaksiomet, Peanos 5. aksiom.

Vi giver endnu et induktionsbevis for en af formlerne fra opgave 3

Vi fandt for 'dobbelttrappen', at $D(n) = D(n-1) + 4n + 1,$ eller samme formel udtrykt for nummer n + 1: $D(n+1) = D(n) + 4(n+1) + 1.$ Vi har også angivet, at vi 'tror', at vi kan beregne $D(n)$ ud fra formlen $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$, men dette er endnu ikke bevist.

Vi vil nu ved hjælp af et induktionsbevis påvise, at der faktisk gælder $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$ for alle naturlige tal *n*.

I. For at benytte induktionsbeviset, skal vi sikre os, at formlen passer for $n = 1$.
$D(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - 1 = 4$, hvilket er det korrekte antal tændstikker.

II. Vi antager derfor, at formlen er korrekt for nummer *n*, altså at vi kan beregne antal tændstikker i den *n*'te figur ved $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$.

Vi skal nu bevise, at formlen også er korrekt for figur nummer n + 1. Vi vil først lige finde ud af, hvordan den formel egentlig ser ud for $D(n+1)$. Sætter vi n + 1 ind i formlen, får vi

$D(n+1) = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1 =$

$2(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) - 1 =$

$2n^2 + 7n + 4.$

Vi skal nu bevise at $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$ medfører, at $D(n+1) = 2n^2 + 7n + 4.$

Det eneste vi med sikkerhed ved er, at $D(n+1) = D(n) + 4(n+1) + 1.$ Vi kan beregne $D(n+1),$ idet vi på højre side indsætter $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$. Vi får så

$D(n+1) = D(n) + 4(n+1) + 1 =$

$2n^2 + 3n - 1 + 4(n+1) + 1 =$

$2n^2 + 7n + 4.$

– altså præcis det ønskede, det samme som formlen giver, når vi indsætter n + 1.

Vi kan nu ud fra induktionsaksiomet slutte, at formlen $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$ gælder for alle naturlige tal *n*.

Opgave 5

I opgave 1 er den rekursive sammenhæng, at L(*n*) = L(*n* – 1) + *n*, og vi kan sige, at L(0) = 0.

For at beregne L(5) kan vi derfor beregne $\sum_{j=1}^{5} j$.

Opgave 7
Fra opgave 2 har vi.

Trekanttal: $T(n) = T(n-1) + n$ og $T(0) = 0$, vi kan derfor beregne $T(n) = \sum_{j=1}^{n} j$.

Firkanttal: $F(n) = F(n-1) + 2n - 1$ og $F(0) = 0$, vi kan derfor beregne $F(n) = \sum_{j=1}^{n} (2j-1)$.

Sekskanttal: $S(n) = S(n-1) + 4n - 3$ og $S(0) = 0$, vi kan derfor beregne $S(n) = \sum_{j=1}^{n} (4j-3)$.

k-kanttal: $K(n) = K(n-1) + (k-2)n - (k-3)$ og $K(0) = 0$, vi kan derfor beregne

$$K(n) = \sum_{j=1}^{n} \left((k-2)j - (k-3)\right)$$

Fra opgave 3 har vi

'Trekanterne': $T(n) = T(n-1) + 3n$. $T(0) = 0$ passer ind i systemet, vi kan derfor beregne

$$T(n) = \sum_{j=1}^{n} 3j.$$

'Firkanterne': $F(n) = F(n-1) + 2n + 2$.
$F(0) = 0$ passer ikke ind i systemet, vi er derfor nødt til at stoppe optrævlingen et skridt tidligere og beregne $F(n) = F(1) + \sum_{j=2}^{n} (2j-2) = 4 + \sum_{j=2}^{n} (2j-2)$.

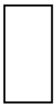
'Dobbelttrappen': $D(n) = D(n-1) + 4n + 1$.
$D(0) = 0$ passer ikke ind i systemet, vi er derfor nødt til at stoppe optrævlingen et skridt tidligere og beregne $D(n) = D(1) + \sum_{j=2}^{n} (4j+1) = 4 + \sum_{j=2}^{n} (4j+1)$.

'Sekskanterne': $T(n) = T(n-1) + 24$.
$T(0) = 0$ passer ikke ind i systemet, vi er derfor nødt til at stoppe optrævlingen et skridt tidligere og beregne $T(n) = T(1) + \sum_{j=2}^{n} 24 = 12 + \sum_{j=2}^{n} 24$.

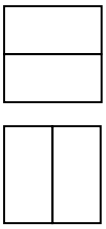
Opgave 10

Hvis antallet af måder man kan lave en sti med *n* dominobrikker kaldes $D(n)$ har vi

$D(1) = 1$

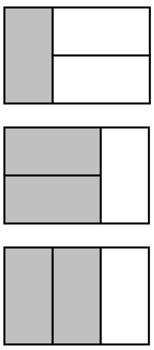


$D(2) = 2$

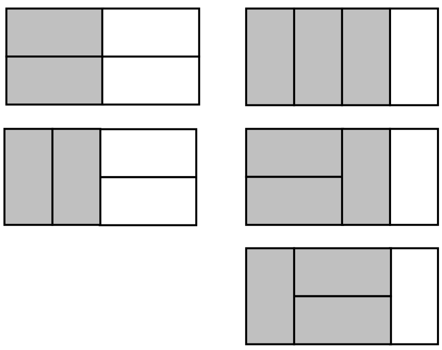


$D(2) = 2$

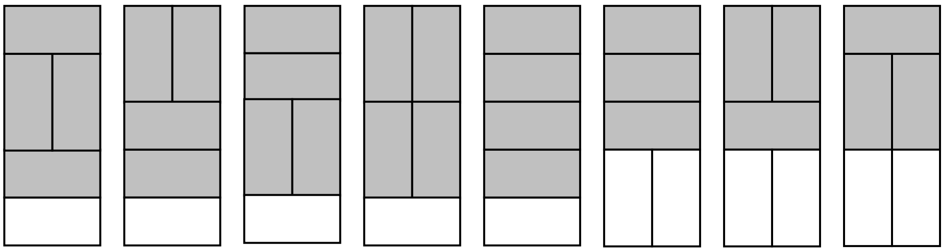
$D(3) = 3 = D(1) + D(2)$



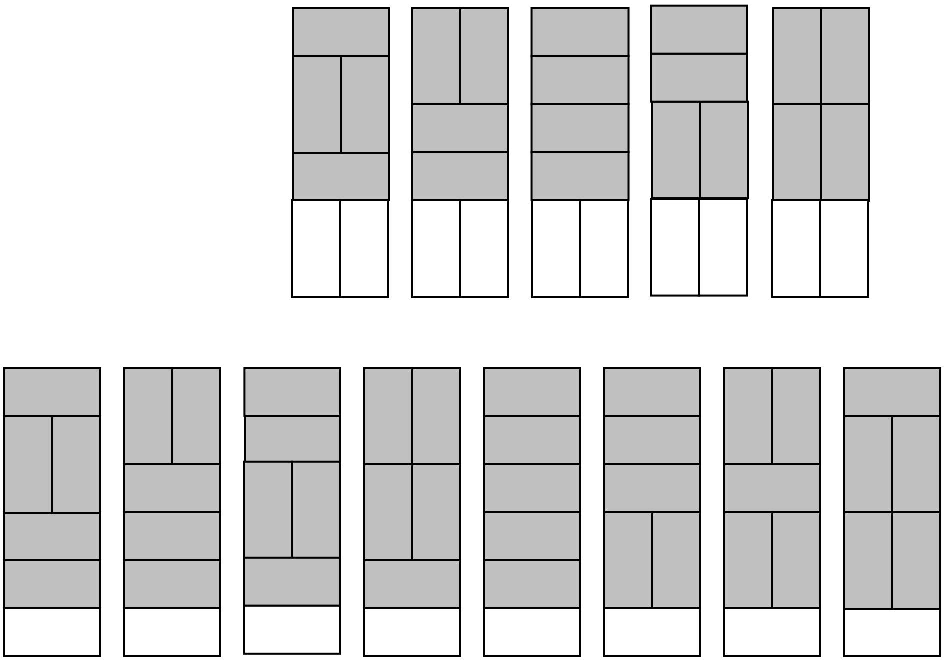
$D(4) = 5 = D(2) + D(3)$



$D(5) = 8 = D(3) + D(4)$



$D(6) = D(4) + D(5)$



Der gælder altså generelt $D(n) = D(n-2) + D(n-1)$, hvilket er samme rekursive sammenhæng som for Fibonacci-tallene.

Der findes også en formel for $D(n)$, men den er (lige som for Fibonacci-tallene) ikke helt nem at finde:

$$D(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

9. Variable

Opgave 3

$A = B + 3$

$B + 2 = 2(C + 2)$ eller $C = \dfrac{B-2}{2}$

Regnearket kan se således ud, hvor B's alder er fri.

	A	B
1	A	=B2+3
2	B	8
3	C	=(B2-2)/2
4	Samlet	=SUM(B1:B3)

Og vi finder løsningen

	A	B
1	A	11
2	B	8
3	C	3
4	Samlet	22

Vi kan også skrive det rent algebraisk op og klare det ved ligningsløsning

$B = 2(C + 2) - 2 = 2C + 2$

$A = B + 3 = 2C + 2 + 3 = 2C + 5$

Indsættes dette i $A + B + C = 28$ får man:

$C + (2C + 2) + (2C + 5) = 22$

$5C + 7 = 22$

$5C = 15$

$C = 3$

hvilket hurtigt løser problemet.

Opgave 5

1)

Lad os sige, at det tager dem tiden x. Da det samme arbejde skal udføres er:

$4x = 7(6\text{ dage }4\text{ timer}) = 42\text{ dage} + 28\text{ timer}$

og x altså lig med 10½ dag + 7 timer, hvilket med en 8 timers arbejdsdag giver 11 dage og 3 timer.

2)

Den ene maskine arbejder med en hastighed af 1 oplag pr. 14 dage ($v_1 = \frac{1}{14}$) og den anden maskine arbejder med en hastighed af 1 oplag pr. 18 dage, ($v_2 = \frac{1}{18}$). Hvis de arbejder i d dage er produktionen givet ved $d \cdot \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{18}\right)$. Maskinerne skal til sammen producere et oplag, så der skal gælde:

$$d \cdot \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{18}\right) = 1$$

$$d \cdot \frac{8}{63} = 1$$

$$d = \frac{63}{8} \approx 7{,}875$$

Hvis en arbejdsdag er 8 timer skal maskinerne arbejde i 7 dage og 3 timer.

3)

Hvis vi kalder det antal læs, A kørte de tre første dage, for a, og det antal læs B hhv. C har kørt for b hhv. c, har vi:

$b = a + 6$

$c = a + 13$

Det samlede antal kørsler er da:

$a + a + 6 + a + 13 = 241$

$3a + 19 = 241$

$a = 74$

De tre har kørt hhv. 74, 80 og 87 læs.

4) B og C har en timeløn på t kr. A har så en timeløn på $1{,}125 \cdot t$. De skal derfor dele beløbet så A får en andel på $1{,}125 \cdot t \cdot 8$ og B og C hver får en andel på $t \cdot 7{,}5$. Værdien af t er uden betydning, så hvis vi kalder B's andel for b skal A have $1{,}125 \cdot \frac{8}{7{,}5} \cdot b$ Da også C får b udbetalt bliver den samlede udbetalte løn:

$$1{,}125 \cdot \frac{8}{7{,}5} \cdot b + b + b = 564{,}25$$

$$3{,}2b = 564{,}25$$

$$b = 176\tfrac{21}{64}$$

$$c = 176\tfrac{21}{64}$$

$$a = 211\tfrac{38}{64}$$

5)
$45 \cdot 2,80 + 60 \cdot 3,2 + x \cdot 4,4 = 450$

$4,4 \cdot x = 132$

$x = 30$

6)
Salgsprisen skal være 4,50 inkl. $33\frac{1}{3}$ % fortjeneste. Prisen før fortjenesten skal derfor være 3,375 kr./kg.

Blandingen består af 144 kr. til 3,60 kr./kg og x kg til 3 kr./kg. Der skal derfor gælde
$144 \cdot 3,60 + x \cdot 3 = (144 + x) \cdot 3,375$

$518,4 + 3x = 486 + 3,375x$

$32,4 = 0,375x$

$x = 86,4$
Han skal bruge 86,4 kg af kaffen til 3 kr./kg.

(Hvis du ikke kunne lide den tilbagegående procentregning i starten af opgaven kunne den være undgået ved at indregne fortjenesten i selve ligningen. Prøv det.)

Opgave 7

Pyramidestubbens rumfang er $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(G+g+\sqrt{G\cdot g}\right)$. Hvis der i virkeligheden er tale om et prisme er G og g ens. Formlen bliver da $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\left(G+G+\sqrt{G\cdot G}\right)=\frac{1}{3}\cdot h\cdot(G+G+G)=h\cdot G$,
hvilket netop er formlen for prismets rumfang.

Undersøgelse 3

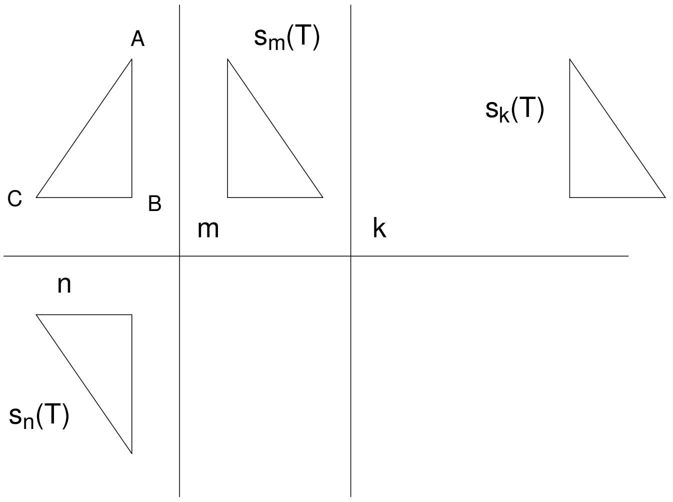
Hvis s er sænkningen i prisen målt i kr., kan man beskrive antallet af passagerer som $8.000+550s$. Billetprisen er $18-s$. Den samlede indtjening er derfor $(8.000+550s)(18-s)$. Der findes igen mange måder at bestemme maksimum for denne funktion på. Den optimale løsning ligger ved en s-værdi på $\frac{19}{11}$ eller ca. 1,75 kroner. Realistisk set må man nok runde prisen ned med et helt antal kroner fx 2 kroner.

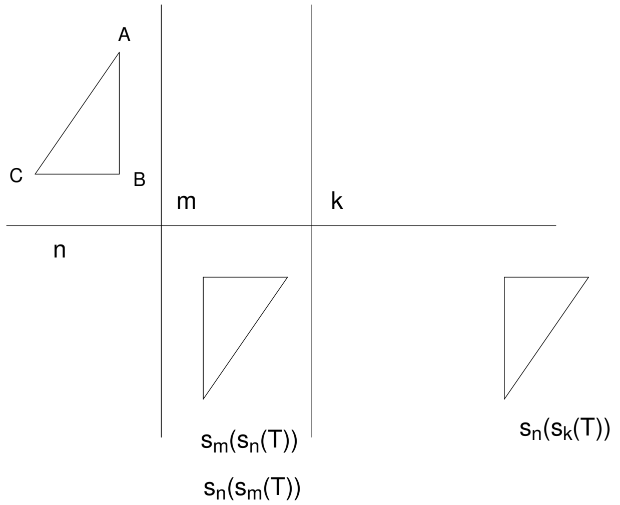
10. Geometri i de første skoleår

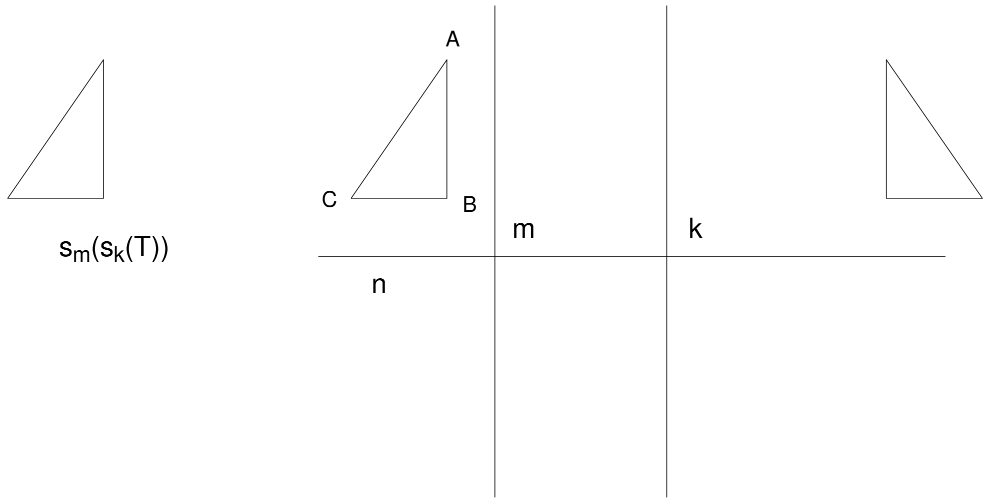
Der er ingen besvarelsesforslag til dette kapitel.

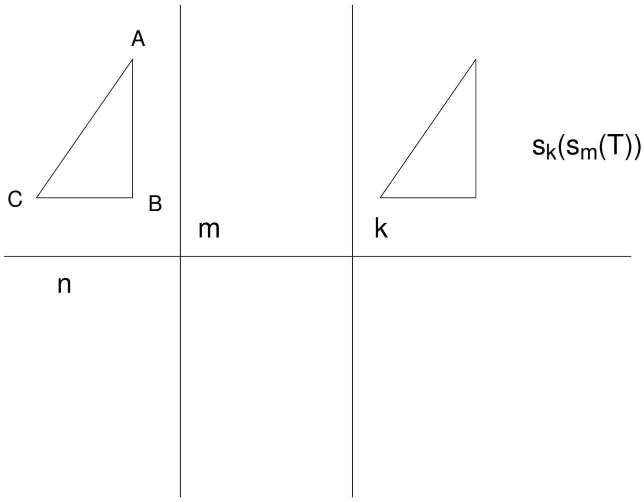
11. Flytninger, eksperimentelt og teoretisk

Opgave 2









$s_n \circ s_k$ er en drejning på 180 grader om de to linjers skæringspunkt

$s_m \circ s_k$ er en parallelforskydning.

$s_m \circ s_k$ er en parallelforskydning med samme længde men modsat retning af $s_m \circ s_k$.

Opgave 6
Der er ikke tale om en spejling her og heller ikke en parallelforskydning. Men der kan heller ikke være tale om en drejning, da omløbsretningen i trekanten er anderledes i billedtrekanten end i den oprindelige. Der er altså tale om en ny slags flytning.

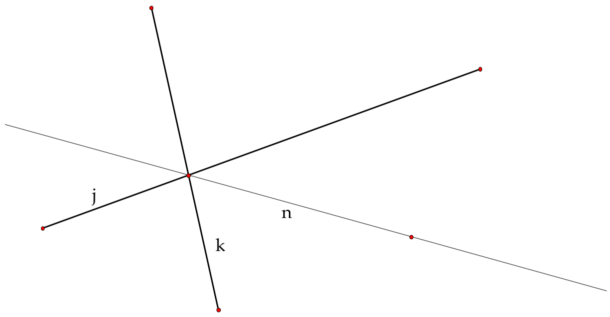
Flytningen er en såkaldt glidespejling. *A* parallelforskydes først mod højre, hvorefter den spejles over i *B*.

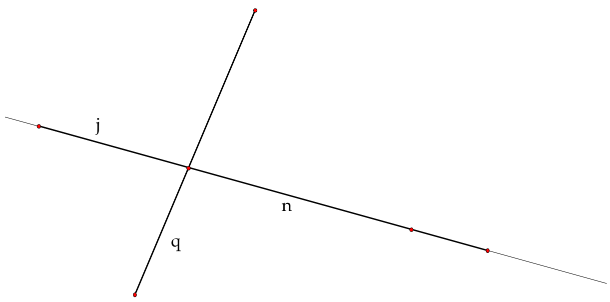
Opgave 10
1) Ifølge sætning 1 gælder der, at en refleksion er en isometri. Ifølge sætning 2 gælder der:
Hvis *f* og *g* er to isometrier, så er den sammensatte $f \circ g$ også en isometri. Derfor er såvel $s_m \circ s_l$ som $s_n \circ s_m \circ s_l$ isometrier.

2) Da trekanten *A*'*C*''*B*'' på figur 11 i kapitel 11 er lig den oprindelige trekant, vil både *A*' og *B*'' ligge lige langt fra *C*'' og *C*'''. *A*' og *B*'' ligger altså på midtnormalen til *C*'' og *C*''' og flyttes derfor ikke ved spejling i linjen *n*.

Opgave 12

De tre linjer går gennem samme punkt: $f = s_n \circ s_j \circ s_k$ bliver til en normal spejling. Betragt $f = s_n \circ (s_j \circ s_k)$. Her er $s_j \circ s_k$ en drejning om linjernes skæringspunkt, og den kan derfor erstattes af spejling i to andre linjer, bare de har samme vinkel mellem sig og samme skæringspunkt. Vi kan derfor vælge en linje q så $s_j \circ s_k = s_n \circ s_q$





På denne måde bliver flytningen til $f = s_n \circ (s_j \circ s_k) = s_n \circ (s_n \circ s_q) = (s_n \circ s_n) \circ s_q = s_q$, altså blot en spejling i én linje, som hævdet.

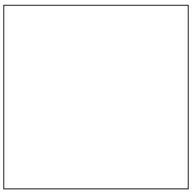
Opgave 14

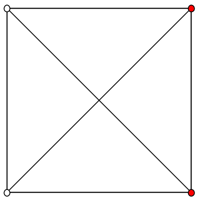
1) Det er i begge tilfælde en parallelforskydning, der fører *A* over i *C*. Altså $g \circ f$ og $f \circ g$ er begge parallelforskydningen langs diagonalen fra *A* til *C*.

Lad *f* være drejningen $s_j \circ s_n$, *g* drejningen $s_n \circ s_k$ og *d* drejningen $s_k \circ s_n$.
Karakteriser flytningerne $f \circ g$ og $f \circ d$

$f \circ g = s_j \circ s_n \circ s_n \circ s_k = s_j \circ s_k$ en drejning på 180 grader om *B*.

$f \circ d = s_j \circ s_n \circ s_k \circ s_n$ er en parallelforskydning mod venstre med det dobbelte af $|AD|$.



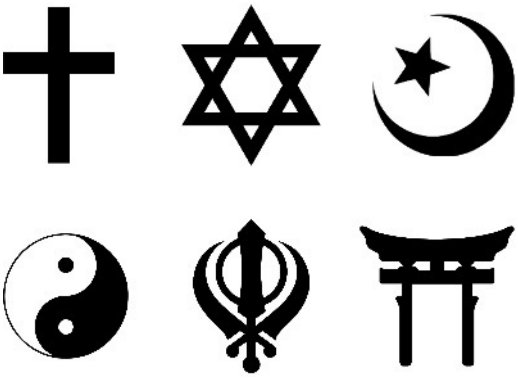


Dette kan indses ved at finde, hvordan et par punkter flyttes eller ved at regne mere algebraisk på de indgående spejlinger, fx kan $s_k \circ s_n$ erstattes med $s_n \circ s_l$, hvorefter vi kan beregne:
$f \circ d = s_j \circ s_n \circ s_k \circ s_n$ til $s_j \circ s_l$, der ses at være den påstående parallelforskydning.

12. Symmetrier og mønstre i verden og i geometrien

Opgave 3

1)

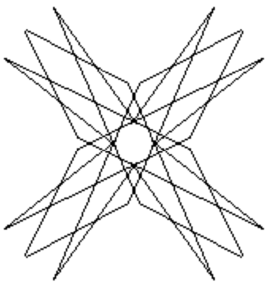


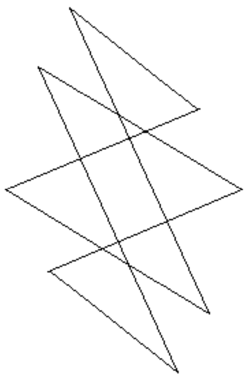
D_1	D_6	D_1
C_1	D_1	D_1

Idet vi observerer, at stjernen i sig selv har større symmetri nemlig D_5. Det taoistiske symbol har en drejning på 180 grader, så selv om farverne ikke kommer på plads, kan man med god ret sige, at symmetrigruppen er C_2.

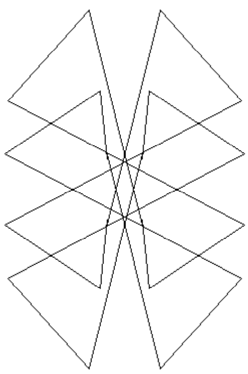
2) Læseren skal selv eksperimentere her, så vi har lavet to fejl i de følgende figurer.

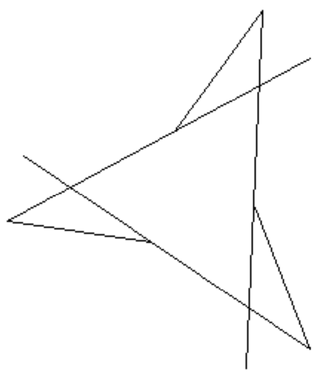
C_4 C_2





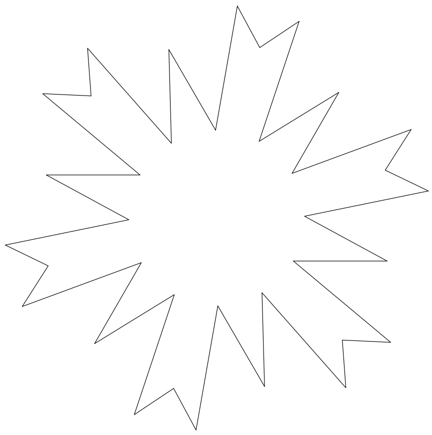
D_2 D_3





Se eventuelt http://www.scienceu.com/geometry/handson/kali/
Her kan du bare trykke på den ønskede symmetrigruppe og få god teknisk støtte til at lave egne rosetter.

D_{12}



Opgave 5 + 6
Se eventuelt her (alle adresser er lokaliseret d. 26/6 2008)
http://www.laer-it.dk/fag/mat/eks/thorvald/thorv.htm
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=168
http://socrates.acadiau.ca/courses/educ/reid/Geometry/Symmetry/frieze.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Frieze_group
http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=168
http://www.math.uic.edu/~burgiel/Mtht420/4/activity.html
http://mathcentral.uregina.ca/RR/database/RR.09.01/mcdonald1/

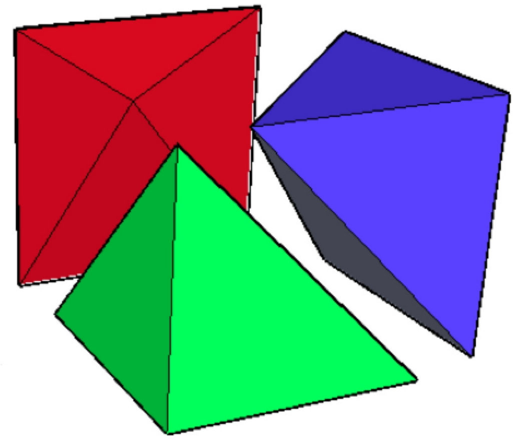
Opgave 10

1) Sådan 6 prismer laver et tæt bundt, når de lægges sammen på den lange led. Bundterne bliver til prismer over en regulær sekskant. Sådan tre bundter kan lægges tæt sammen, og flere kan føjes til, så rummet udfyldes.

2) Prøver man efter, vil man finde, at det for de skæve prismers vedkommende er bedst, hvis det vinkelrette tværsnit er en ligesidet trekant.

3) Ja, hvis der på gulvet er en tæt fliselægning med fliser, der er 1 cm høje, så kan man jo bare lægge gulvet 10 gange og dermed få et 10 cm højt udsnit af rummet fyldt med prismer, og dette kan gentages for de næste 10 cm, osv. Prismerne bestående af 10 fliser kan fylde rummet.

4)



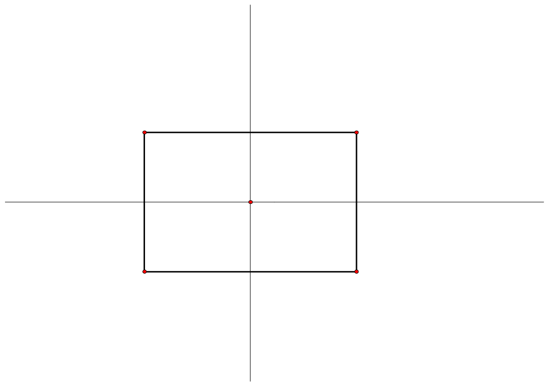
Tre 'skæve' pyramider kan fx danne en kasse.

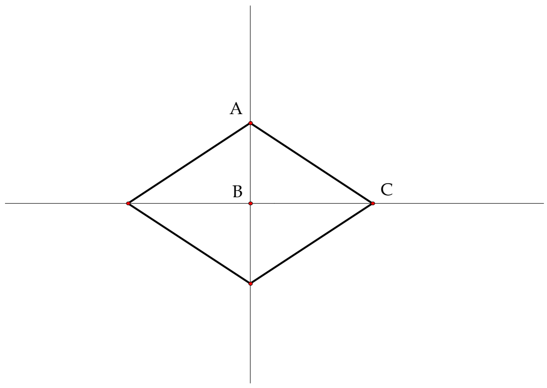
13. Den elementære skolematematik, perspektiveret ved symmetrier og flytningsregning

Opgave 1
Firkanter.
Hvis en firkant har en drejning på 180 grader som en symmetri, betyder det, at de modstående sider bliver parallelle og lige store, da de føres over i hinanden ved denne drejning.

Figuren er altså er parallelogram. I et skævt parallelogram er der ikke yderligere symmetrier, så symmetrigruppen indskrænker sig til C_1.

Hvis parallelogrammet har alle fire sider lige store – men stadig skæve vinkler – bliver det en rombe. Hvis parallelogrammet kun har de modstående side lige store – men rette vinkler – bliver det et ikke-kvadrattisk rektangel. I begge tilfælde bliver symmetrigruppen D_2.

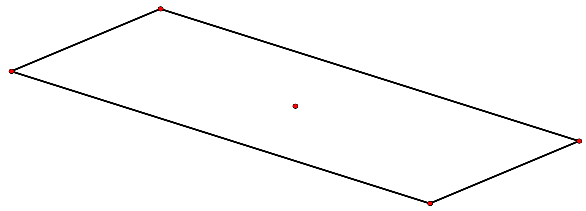




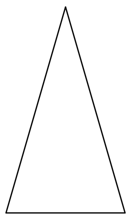
Begge figurer kan karakteriseres ved to tal. Rektanglet ved sidelængderne og romben ved en vinkel og sidelængden (eller ved de to diagonaler).

Hvis både vinkler og sider bliver lige store, er det tale om et kvadrat, og symmetrigruppen øges til D_4. Kvadratet er som bekendt karakteriseret ved sin sidelængde.

Vi mangler at bevise, at der skal tre stykker til at karakterisere et parallelogram. Hvis vi kun har givet siderne, altså lavet et parallelogram af to gange to lister slået samme med fire søm i hjørnerne er det som bekendt lidt slattent og kan klappes helt sammen, så der skal også en af vinklerne med for at karakterisere et specifikt parallelogram, i alt tre stykker.

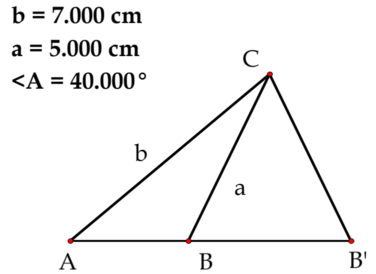


Trekanter
Den ligesidede trekant har symmetrigruppen D_3 og ligebenede trekanter (med to forskellige side-længder) har symmetrigruppe D_1.



Det er klart, vi kan nøjes med sidelængden for at karakterisere en specifik ligesidet trekant, mens begge sidelængderne skal med i den trekant, der kun er ligebenet.

En vilkårlig trekant er ifølge den første kongruenssætning fastlagt ud fra sine tre sider, så man kan nøjes med tre stykker til at fastlægge enhver trekant, men det er nu ikke lige meget hvilke tre stykker man vælger. Her er et eksempel på tre stykker, der ikke slår til at karakterisere en trekant uden symmetri entydigt:



Der er to trekanter, nemlig *ABC* og *AB'C*, der opfylder kravene.

Vi påstår i bogen, at en trekant ikke kan have symmetrigruppe D_2. Hvordan kan vi bevise det? Jo, for symmetrigruppen D_2 indeholder en rotation på 180 grader. Og hvis en rotation på 180 grader fører en trekant over i sig selv, så vil en af trekantens sider herved føres over i en anden af siderne, som nødvendigvis ville blive parallel med den første. Men disse to sider vil mødes i et hjørne, hvor topvinklen så ville blive på 0 grader. Der ville altså være tale om en sammenklappet 'trekant', og den er ikke i normal geometri at regne for en trekant (men *hvis* den var, så er det sandt nok at symmetrigruppen er D_2).

Opgave 5
Hvis linjerne *n* og *j* er parallelle, bliver $s_n \circ s_j$ og $s_j \circ s_n$ parallelforskydninger vinkelret på linjerne, men i hver sin retning. Dog er der en undtagelse, hvis linjerne ligger oven i hinanden, idet sammensætningen så er den identiske flytning. De to flytninger kan derfor kun være ens hvis *n* og *j* er sammenfaldende.

Hvis linjerne ikke er parallelle, er $s_n \circ s_j$ og $s_j \circ s_n$ drejninger om linjernes skæringspunkt med hhv. + og – det dobbelte af vinklen mellem linjerne. Hvis drejningerne er på 180 grader, er $s_n \circ s_j$ og $s_j \circ s_n$ identiske og ellers ikke.

Konklusionen er, at $s_n \circ s_j$ og $s_j \circ s_n$ er ens, når linjerne er sammenfaldende, eller når linjerne er vinkelrette.

Opgave 7
$a * b = 2a + b$, da er $3 * 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ og $(3 * 2) * 5 = 8 * 5 = 2 \cdot 8 + 5 = 21$

Associativitet:
$(a * b) * c = 2(a * b) + c = 2(2a + b) + c = 4a + 2b + c$
$a * (b * c) = 2a + (b * c) = 2a + 2b + c$
kompositionen er derfor ikke associativ.

Kommutativitet:
Da $3 * 2 = 2 \cdot 3 + 2 = 8$ og $2 * 3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ er kompositionen heller ikke kommutativ.

$a \# b = a + b + 1$

Kommutativitet: $b \# a = b + a + 1 = a + b + 1 = a \# b$, da alm. + er kommutativ.

Associativitet:
$(a \# b) \# c = (a \# b) + c + 1 = a + b + 1 + c + 1 = a + b + c + 2$
$a \# (b \# c) = a + (b \# c) + 1 = a + b + c + 1 + 1 = a + b + c + 2$

Da de to udregninger giver det samme, er kompositionen associativ.

Neutralt element:
$a \# (-1) = a + (-1) + 1 = a$
$(-1) \# a = -1 + a + 1 = a$

-1 er derfor neutralt.

Inverst element:
Hvis *b* er inverst til *a*, skal der gælde:
$a \# b = -1$
$a + b + 1 = -1$
$b = -a - 2$

Det inverse til *a* er derfor -*a* -2, som vi også kan se af den følgende udregning:
$a \# (-a - 2) = a + (-a - 2) + 1 = -1$
$(-a - 2) \# a = -a - 2 + 1 + 1 = -1$

Opgave 9

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Gruppen er kommutativ, da der er symmetri langs diagonalen. D_3 er ikke kommutativ, så der kan ikke være tale om den samme gruppe.

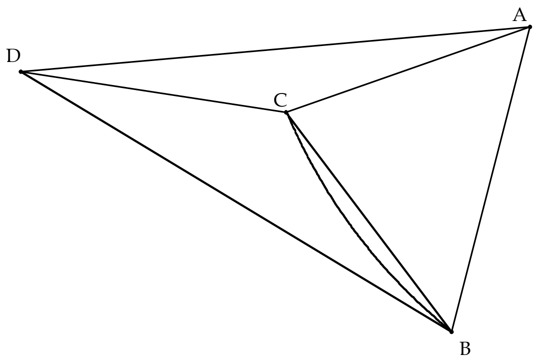
Derimod er det strukturelt set den samme gruppe som $(C_6, \circ)$, hvilket kan ses, hvis man lader 1 svare til en drejning på 60 grader, 2 til en drejning på 120 grader, 3 til 180 grader osv.

14. Eksperimentelle undersøgelser af former i rummet

Her er ingen forslag til besvarelser, da opgaverne i den grad er en opfordring til selv at undersøge.

15. Geometri i nyere tid

Opgave 1
En mulighed er



Opgave 4
Hvis *A* og *B* er de eneste knudepunkter, der har ulige valens, kan vi tilføje en kant til grafen, som forbinder *A* med *B*. Derved får alle knudepunkter lige valens, og vi kan lave en rundtur i grafen, der starter og slutter i *A,* og som går ad alle kanter. Ved at skifte rundt på den rækkefølge vi går ad kanterne, kan vi sikre os, at den sidste kant i rundturen er den ekstra kant mellem *A* og *B*. Turen rundt i grafen uden denne kant vil derfor være en tur rundt ad alle kanter fra *A* til *B*.

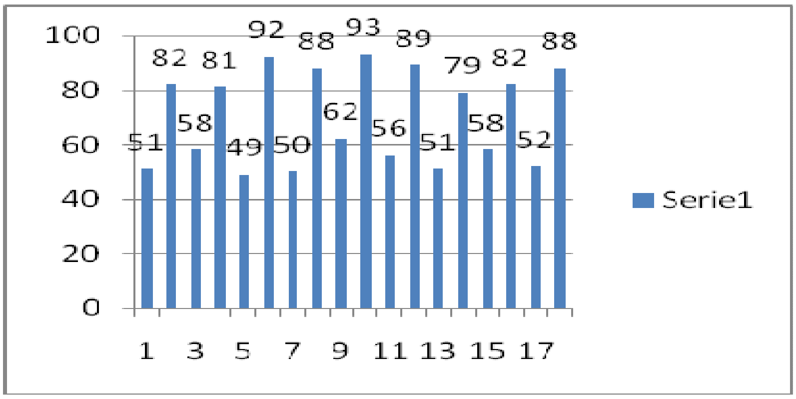
Opgave 7
Ved at til tilføje en ny kant, der starter i et eksisterende punkt og ender i et nyt punkt, øges både *P* og *K* med én. Men da de indgår med modsat fortegn i formlen for Eulertallet, vil ændringerne ophæve hinanden. Tilføjes en kant der forbinder to punkter kommer den nødvendigvis til at dele et område (en flade) op i to, så i denne situation forøges *F* og *P* begge med 1, hvilket udlignes i Eulertallet, der forbliver på 2.

16. Databehandling

Opgave 3
Det kan være praktisk at have data tilgængelige i en elektronisk udgave for nemmere at kunne eksperimentere med dem.

Dag 1	51	82	58	81	49	92	50	88	62	93	56	89	51	79	58	82	52	88
Dag 2	86	78	71	77	76	94	75	50	83	82	72	77	75	65	79	72	78	77
Dag 3	65	89	49	88	51	78	85	65	75	77	69	92	68	87	61	81	55	93

I mangel af en bedre idé prøver vi at lave et søjlediagram over tallene den første dag:



Her falder det i øjnene, at der er et ganske regulært skift mellem korte og lange søjler, som om en lang ventetid efterfølges af en kortere. Måske skulle vi så prøve at opdele materialet i de kortere og de lange hver for sig, altså vælge hver anden. Vi fortsætter med at gøre det for den første dag, så vi kan bruge de to næste dage til at afprøve den indsigt, vi tror at have vundet ud fra en analyse af førstedagens materiale.

Hver anden / korte:	51	58	49	50	62	56	51	58	52
Hver anden /lange:	82	81	92	88	93	89	79	82	88

Vi kan karakterisere hver talserie ved hjælp af fx minimum, kvartilsæt og maksimum for at se, om det afslører noget interessant (i et regneark kan det klares i en håndevending med funktionen kvartil):

deskriptor	minimum	nedre kvartil	median	øvre kvartil	maksimum
hjælpetal	0	1	2	3	4
korte	49	51	52	58	62
lange	79	82	88	89	93

Vi observerer, at de lange og de korte ventetider er klart adskilte. Og vi kunne nok forvente at de korte også i fremtiden ville ligge i 50'erne, mens de lange ville ligge i 80'erne, måske med enkelte afvigelser.

Fortsæt selv beskrivelsen og undersøgelsen.

Opgave 6
1) Det kan godt være at svømmeveste er en god sikkerhed mod drukning, men argumentet holder ikke, hvilket afsløres, hvis man skriver noget andet i stedet for svømmeveste, fx "havde hat på":
"I det forløbne år druknede 35 personer ved bådulykker. Kun fem af dem havde hat på; ingen af de andre bar hat. Bærer de selv hat, når de er ude at sejle?"

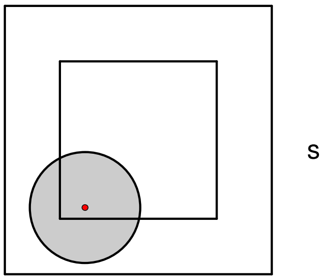
Men det mest kritiske spørgmål er: "Hvor mange folk til søs bærer egentlig svømmevest? Hvis kun 3% bærer svømmevest og en 'stikprøve' på 35 falder i vandet og drukner, så ville vi selv ved virkningsløse svømmeveste kun forvente, at en enkelt af disse havde svømmevest på. Når der nu var 5 af de 35, der havde svømmevest på, så synes det at tyde på, at svømmevestene får folk til lettere at falde over bord og drukne. De er altså direkte farlige.

Overvej, hvor stor en procentdel af befolkningen der normal skal bære svømmeveste til søs, før argumentet i annoncen kan siges at holde?

2) *Den snigende død i mineralvand*
På grafen kan man se, at hvis alle folk i en mellemstor by på 25.000 hver dag drikker 20 liter mineralvand fra Perrier, så vil antallet af kræftilfælde inden for de næste 40 år stige med 1 i byen. Hertil kommer forureningen fra de lastbiler der hver dag skal bringe de nødvendige 1½ millioner flasker ind til byen. Regeringen overvejer at nedsætte det størst tilladelige indtag til 5 liter pr. dag, hvilket ca. vil halvere risikoen og i al fald lette på trafikken.

17. Sandsynligheder i skolens yngste klasser

Opgave 3
En teoretisk fortolkning er, at der er gevinst, hvis møntens centrum befinder sig inden for et mindre kvadrat.



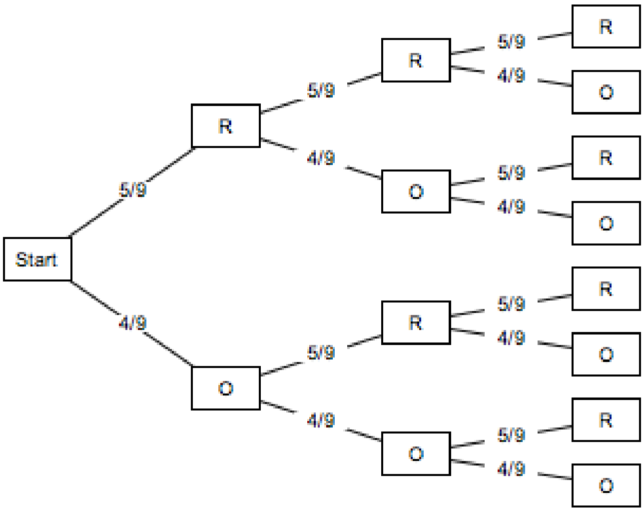
Hvis det store kvadrat har sidelængde *s* har det mindre kvadrat sidelængde *s* – *d*, hvor *d* er møntens diameter. Det teoretiske bud på sandsynligheden er forholdet mellem de to arealer, altså

$$\frac{(s-d)^2}{s^2}$$

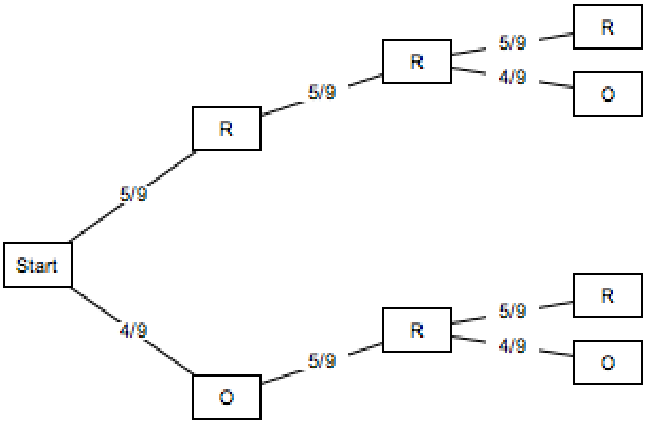
En to-krone har en diameter på 2,45 cm. Hvis vi skal finde den teoretiske gitterstørrelse, der giver sandsynlighed på 50% skal vi løse ligningen:

$$\frac{(s-2,45)^2}{s^2}=0,5.$$

Opgave 6
Med tilbagelægning er chancetræet



og det reducerede chancetræ, hvor 2. kugle er rød er



Den samlede sandsynlighed i det 'univers', hvor 2. kugle er rød er $\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot(\frac{5}{9}+\frac{4}{9})+\frac{4}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot(\frac{5}{9}+\frac{4}{9})=\frac{45}{81}$.
3 røde findes kun ét sted med sandsynlighed på $\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{5}{9}=\frac{125}{729}$.
Sandsynligheden for at få 3 røde, når den 2. kugle er rød, er $\frac{125}{729}\Big/\frac{5}{9}=\frac{25}{81}$

Opgave 9

Summen af to terninger giver 11 forskellige udfald. Ved hjælp af chancetræ eller andre repræsentationer kan man finde sandsynlighederne.

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Som spiller har men derfor $\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$ chance for at vinde i hvert spil.

Ved hjælp af et chancetræ kan man bestemme sandsynligheden for 0, 1, 2 eller 3 gevinster i 3 spil.

0	0,2963
1	0,4444
2	0,2222
3	0,0370