KOMBINATORIK

Dette er et supplerende kapitel til lærebogen stokastik 1.-10. klasse. Bogen kan læses uden reference til indholdet i dette kapitel, men da man sommetider baserer arbejdet med sandsynlighedsregning kraftigt på klassisk kombinatorik, har forfatterne fundet det rimeligt at give særligt interesserede matematikhold denne valgmulighed.

Kombinatorik er kort fortalt 'kunsten' at lave optællinger. Ordet kombinatorik blev introduceret af Leibniz i midten af 1600-tallet som betegnelse for det at lave systematiske optællinger af muligheder. Han havde undret sig over, hvorfor summerne 9 og 10 ikke forekommer lige ofte, når man kaster to terninger. Han konstaterede, at der er to muligheder for at få 9, nemlig 3 + 6 og 4 + 5, og at der også er to muligheder for at få 10, nemlig 4 + 6 og 5 + 5. Men hvorfor forekommer de to summer så i praksis et forskelligt antal gange, når man spiller? (http://www.matheprisma.uni-wuppertal.de/Module/Kombin/intro1.htm).

Øvelse 1

Kan du finde en forklaring på Leibniz' problem?

Der var en vedvarende uoverensstemmelse med det resultat, man fik i praksis, og det Leibniz tænkte sig til. Og da praksis ikke vedvarende kan være forkert, må fejlen findes i den måde Leibniz tænkte på! Man kunne for eksempel spørge, om Leibniz har ret i, at der er to muligheder for at slå både 9 og 10? Det er den slags overvejelser, man beskæftiger sig med i kombinatorik.

Kombinatorik har en nær tilknytning til sandsynlighedsregning i forbindelse med spilsituationer. For der kan sandsynlighederne fastlægges efter det, vi har kaldt *Laplaces princip* (jf. kapitel 5 i stokastik-bogen):

> "Laplaces Princip: Sørg så vidt muligt for, at de n udfald i eksperimentet klart er symmetriske og dermed lige sandsynlige, så er sandsynligheden for hvert enkelt udfald $\frac{1}{n}$. Sandsynligheden for en hændelse, der består af m af udfaldene, er lig med $\frac{m}{n}$."

Problemet med at benytte Laplaces princip er, at man skal kunne finde, hvor mange mulige udfald, der er af et eksperimentet, hvis de skal være "klart symmetriske og dermed lige sandsynlige". Det er her, vi får brug for kombinatorik, der bidrager med metoder til at tælle mængder, som det er uoverkommeligt eller meget besværligt at optælle direkte.

Det er målet med kapitlet, at læseren efter at have arbejdet det igennem:

- Kan anvende additionsprincippet og multiplikationsprincippet i optællingsproblemer.
- Kender den klassiske opdelingen af optællingsproblemer i fire kategorier alt efter, om udvælgelsen af elementer foregår med eller uden tilbagelægning, og om der tages hensyn til ordningen af elementerne.
- Kende til nogle af de mange optællingssituationer, der ikke falder ind under en af de fire kategorier.

> **Øvelse 2**
>
> Hvis man fx slår med to terninger, kan de mulige resultater angives som et ordnet par, hvor førstekomponenten angiver resultatet af den ene terning, og andenkomponenten angiver resultatet af den anden terning.
>
> 1) Find på den måde, hvor mange forskellige muligheder der er i alt.
>
> 2) Hvad nu hvis det er en mønt, der skal kastes to gange, hvor mange muligheder er der så?
>
> 3) På hvor mange forskellige måder kan man klæde sig på med fem forskellige skjorter, 4 forskellige par bukser og tre forskellige par sko?

Resultaterne til spørgsmålene i øvelse 2 kan bestemmes ved udregninger af kombinatorisk art. Fx har hver terning 6 forskellige udfald, og hvert udfald på den ene terning kan frit kombineres med hvert af de 6 udfald på den anden terning. Der er derfor $6 \cdot 6 = 36$ muligheder. Følgende eksempel benytter til dels samme tankegang.

Eksempel 1

Bestem antallet af trecifrede tal, der kan skrives med cifrene 1, 2, 3, …, 9.

Forestil dig, at du skal opskrive trecifrede tal ved udelukkende at benytte cifrene 1, 2, …, 9. På hundredernes plads kan man frit vælge mellem alle ni cifre, på 10'ernes plads er der ligeledes mulighed for at skrive alle ni cifre, ligesom alle ni kan benyttes på enernes plads. Der må derfor være $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ forskellige tal.

Hvad nu hvis man vil have, at de tre cifre skal være forskellige?

Hundrederne kan vælges frit blandt de ni cifre. Tierne kan frit vælges blandt de otte cifre, der ikke allerede er i brug, dvs. på otte måder, og enerne kan vælges blandt de syv cifre, der ikke er benyttet endnu. Der er derfor $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ muligheder, hvis de tre cifre skal være forskellige.

Eksemplet ovenfor illustrerer det ene af to grundlæggende principper i kombinatorik, *multiplikationsprincippet*.

Multiplikationsprincippet for kombinatorik

Hvis et kombinatorisk problem P kan optælles til p måder og et andet, af P uafhængigt, kombinatorisk problem Q kan optælles til q måder, da kan det kombinatoriske problem (både P og Q) optælles til $p \cdot q$ måder.

Øvelse 3

Forklar, hvorledes multiplikationsprincippet er benyttet i eksempel 1.

Multiplikationsprincippet kaldes også for *både-og-princippet*. Den sprogbrug kommer af, at i de tilfælde, hvor princippet kan bruges, kan den samlede udvælgelsesproces deles op i to eller flere indbyrdes uafhængige delprocesser, som alle skal gennemløbes. I øvelse 2 skal der således kastes to terninger. Man er derfor interesseret i antallet af muligheder, når *både* den første *og* den anden terning kastes.

Der er imidlertid også situationer med antalsbestemmelse, hvor multiplikationsprincippet ikke kan bruges. Forestil dig et spil, der går ud på, at man i blinde vælger enten en almindelig terning eller et dodekaeder (en 'terning' med 12 sider), hvor siderne er mærket med tallene fra 1 til 12. Man kan da få noteret resultatet som T1, T2, …, T6 eller D1, D2, …, D12. I det tilfælde er der åbenlyst ikke $6 \cdot 12 = 72$, men $6 + 12 = 18$ mulige udfald. Det princip, der ligger til grund herfor, kaldes *additionsprincippet* eller *enten-eller-princippet*. Det kan formelt formuleres således:

Additionsprincippet for kombinatorik

Hvis et kombinatorisk problem P kan optælles til p måder og et andet, af P uafhængigt, kombinatorisk problem Q kan optælles til q måder, da kan det kombinatoriske problem (enten P eller Q) optælles til $p + q$ måder.

Øvelse 4

I en iskiosk kan man få 'gammeldags' isvafler og vælge mellem 9 slags is, syltetøj eller 3 slags drys.

Hvor mange forskellige is kan man købe, hvis der er én kugle is i vaflen?

Hvor mange forskellige is kan man få med to kugler is?

Overvej/diskuter 1

I en regulær trekant (dvs. en ligesidet trekant) er der 0 diagonaler. I en regulær firkant (dvs. et kvadrat) er der 2 diagonaler. Hvor mange diagonaler er der i en regulær 5-kant? I en regulær 6-kant? I en regulær n-kant? Løs opgaven.

Se på figur 1 hvordan en elev fra 8. klasse har løst opgaven; vurder den. Er der strategier i denne løsning, som andre i klassen kunne få glæde af?

Udfyld resten af skemaet:

Figur	3-kant	4-kant	5-kant	6-kant	7-kant	8-kant	12-kant	n-kant
Antal diago-naler	0	2	5	10				

Kant	Sende til
3	0
4	1
5	2
6	3
7	4

$3 - 3 = 0$
$4 - 3 = 1$
$5 - 3 = 2$
$6 - 3 = 3$
$7 - 3 = 4$

$5(5-3):2$ = antal diagonaler i 5-kant

i en n kant $n(n-3):2$ = antal diagonaler

Figur 1.

Overvej/diskuter 2

Vi har nu navngivet to principper i kombinatorikken: multiplikationsprincippet og additionsprincippet. Sammenhold disse principper med sandsynlighedsregningens mutiplikationsprincip og additionsprincip (i kapitel 5 og 6 i stokastik-bogen) for at afklare, om de måske i virkeligheden har fat i samme sagsforhold. Skriv en kort redegørelse for det, idet du fx starter med at analysere et konkret eksempel som sandsynligheden for at få 2 eller 4 i kast med en terning og sandsynligheden for, at begge terninger viser 5 i kast med to terninger.

Øvelse 5

I Danmark har vi mønter med 50 øre, 1 kr., 2 kr., 5 kr., 10 kr. og 20 kr.

I det følgende problem ser vi bort fra mønter med en værdi under en krone, dvs. 50-øren er ikke med i problemet.

Et beløb på 2 kr. kan betales som én 2-krone eller som to 1-kroner.

Et beløb på 3 kr. kan betales som tre 1-kroner eller én 1-krone og én 2-krone.

Hvor mange måder kan man betale et beløb på 4 kr.? 5 kr.? 6 kr.? 10 kr.?

De foregående øvelser er alle eksempler på kombinatoriske problemer, som et stykke hen ad vejen kan løses med ad hoc-metoder. De to første øvelser kan også løses generelt uden alt for store problemer, hvorimod den sidste øvelse kræver en del, hvis den skal løses generelt.

Øvelserne illustrerer meget godt det brede spektrum af problemer, der falder ind under samlebegrebet kombinatorik. Nogle kombinatoriske problemer bliver hurtigt meget komplicerede, men der findes en række problemer, der lader sig analysere inden for rammerne af den matematik, vi har til rådighed, og som også kan være til hjælp, når vi sidenhen skal benytte Laplaces princip i forbindelse med sandsynlighedsregning.

I stokastik-bogen gør vi brug af chancetræer for at anskueliggøre problemerne. I analogi med chancetræerne kan man ofte anskueliggøre kombinatoriske problemer med et *tælletræ*.

Eksempel 2

I skolen har man traditionelt arbejdet meget med problemstillinger som denne: "Fra en pose med 3 hvide og 5 røde kugler trækkes 2 kugler. Hvor mange måder kan det gøres på."

Umiddelbart lyder problemet fredeligt, men som vi skal se i dette eksempel, er der plads til adskillige fornuftige fortolkninger. Hvis problemet skal danne udgangspunkt for en forståelse af kombinatorik i skolen, er det nødvendigt at være bevidst om, hvilken fortolkning man arbejder med.

Den første og formentlig mest umiddelbare fortolkning er: Kuglerne kan enten være røde eller hvide, der er derfor tre forskellige muligheder, nemlig rød-rød, rød-hvid og hvid-hvid.

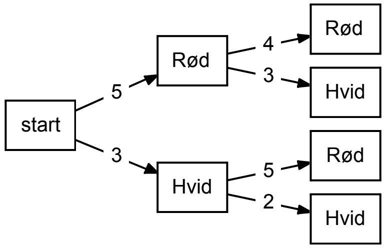
Anden fortolkning er, at kuglerne trækkes én ad gangen. Vi kan derfor tale om en første og en anden kugle. Når der således er forskel på kuglerne, bliver konklusionen, at der er tale om fire forskellige muligheder: rød-rød (RR), rød-hvid (RH), hvid-rød (HR) og hvid-hvid (HH).

Tredje fortolkning baserer sig måske på en erfaring, der fortæller os, at ikke alle kombinationerne RR, RH, HR og HH forekommer lige ofte i et eksperiment. De optræder derfor også med forskellig sandsynlighed. Skal vi beregne disse sandsynligheder, kommer problemet til at handle om, hvor mange forskellige måder de forskellige kombinationer kan fremkomme på. Til det formål kan det måske være en fordel at forestille sig, at man kan kende forskel på kuglerne af samme farve (de kan fx have forskellige numre).

Ikke nok med at der er en tredje fortolkning, denne fortolkning har også flere svarmuligheder, alt efter om vi regner med, at kuglerne vælges med eller uden tilbagelægning. Der er fire sådanne muligheder:

Mulighed 1

Vælger vi de to kugler, én ad gangen og uden tilbagelægning, kan udvælgelsen illustreres ved et tælletræ.



Figur 2.

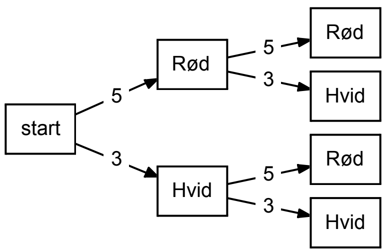
Vi kan derfor bestemme, at:
udtrækningen RR kan ske på $5 \cdot 4 = 20$ måder,
udtrækningen RH kan ske på $5 \cdot 3 = 15$ måder,
udtrækningen HR kan ske på $3 \cdot 5 = 15$ måder og
udtrækningen HH kan ske på $3 \cdot 2 = 6$ måder.

Mulighed 2

Hvis vi derimod blot er interesseret i udtrækninger, der resulterer i et bestemt antal røde kugler, som i fortolkning 1, er svaret, at antallet af mulige udtrækninger der resulterer i:
2 røde kugler, dvs. RR bliver 20,
1 rød kugle, dvs. RH eller HR bliver 30,
0 røde kugler, altså HH bliver 6.

Mulighed 3

Hvis udtrækningen af kuglerne foregår med tilbagelægning, dvs. man trækker én kugle ad gangen og lægger den udrukne kugle tilbage i posen, inden kugle nummer 2 trækkes, bliver tælletræet:



Figur 3.

Udtrækningen:
RR kan ske på $5 \cdot 5 = 25$ måder,
RH kan ske på $5 \cdot 3 = 15$ måder,
HR kan ske på $3 \cdot 5 = 15$ måder og
HH kan ske på $3 \cdot 3 = 9$ måder.

Mulighed 4
Hvis vi derimod atter blot er interesseret i, hvorvidt udtrækningerne har præcis 0, 1 eller 2 røde kugler, er svaret, at antallet af muligheder for at få:
2 røde kugler er 25,
1 rød kugle er 30 og
0 røde kugler er 9.

Øvelse 6

Gør rede for, hvorledes multiplikations- og additionsprincippet er benyttet i det foregående eksempel.

Ovenstående eksempel viser, at der er to forhold, der spiller en rolle:

- skal udvælgelsen foregå med eller uden tilbagelægning?
- betyder det noget, hvilken rækkefølge udtrækningen sker i, eller er man blot interesseret i sammensætningen af udvalget (fx præcis 1 rød kugle)?

Disse sondringer kommer til at være centrale i det kommende afsnit.

UDVÆLGELSE

I dette afsnit skal vi se nærmere på de fire muligheder fra eksempel 2. Vi skal analysere udtrækning/udvælgelse, hvor rækkefølgen er af betydning, såkaldt *ordnet udvælgelse*, og udvælgelse hvor rækkefølgen ikke er af betydning, såkaldt *uordnet udvælgelse.* Og vi skal i begge situationer se på udvælgelse med og uden tilbagelægning.

Hvis man tænker på en tipskupon som en udvælgelse af et af symbolerne 1, X eller 2 for hver af de 13 kampe på kuponen, er det ikke ligegyldigt, om man har valgt 1X2212XX121XX eller 12XXX221XX112, selv om begge 'rækker' indeholder det samme antal 1'ere, 2'ere og X'er. Tipskuponen er en situation, hvor rækkefølgen af udvælgelserne spiller en rolle. Lotto, hvor fx 7 kugler udtrækkes uden tilbagelægning fra 36 kugler nummereret fra 1 til 36, er derimod et eksempel på et spil, hvor rækkefølgen ikke har betydning. Hvis man har spillet på tallene 2, 3, 5, 7, 11, 13 og 17, vil man have 7 rigtige, hvis det er disse 7 tal, der bliver udtrukket af spillemaskinen, uanset om de udtrækkes i rækkefølgen 3, 17, 11, 13, 7, 2, 5 eller 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2.

I situationer med ordnet og uordnet udvælgelse kan det ske, at man har mulighed for at udvælge det samme element mere end én gang, men det kan også ske, at man ikke må udvælge et element mere end én gang.

Man kan tænke på tipskuponen, som om man for hver kamp skal vælge ét af tegnene 1, X eller 2. For hver kamp kan man vælge mellem alle tre tegn, og udvælgelsen af de 13 tegn, der tilsammen udgør en tipskupon, tillader derfor gentagelser. Man kalder det en udvælgelse *med tilbagelægning* ud fra en forestilling om, at den mængde, hvorfra tipstegnene vælges, er den samme hver gang. Man har ikke fjernet de tegn, der tidligere måtte være udvalgt. (Populært sagt: 1, X og 2 ligger i en skål på bordet, når man har valgt og noteret et tegn, lægges det tilbage i skålen).

I spillet roulette foregår udvælgelsen ved, at en lille kugle falder til hvile på en roterende skive med små felter. Der er 37 felter, nummereret 0-36. I hvert spil på rouletten er det den samme skive og den samme kugle, og derfor er der i hvert spil de samme muligheder. Man vil også referere til rouletten som en udvælgelse med tilbagelægning, selv om det måske ikke er så oplagt at tænke på en mængde, hvorfra man eventuelt kunne have fjernet noget fra spil til spil. Metaforen 'tilbagelægning' skal man derfor ikke fortolke for hårdt som en fysisk handling.

Tilsvarende taler man om udvælgelse *uden tilbagelægning*, hvis man ikke tillader genbrug af de allerede udvalgte elementer. Lotto er et eksempel på en udvælgelse uden tilbagelægning.

Ordnet udvælgelse uden tilbagelægning

I dette afsnit skal vi se på udvælgelse, hvor rækkefølgen er af betydning, og hvor vi ikke tillader, at det samme 'element' vælges mere end én gang.

Øvelse 7

Forestil dig, at du har fire brikker med farverne R(ød), B(lå), H(vid) og G(ul).

Du skal vælge tre brikker uden tilbagelægning og lægge dem på en række. Opskriv alle mulige rækkefølger for udvælgelsen af tre af de fire farver.

Hvor mange muligheder er der?

Eksempel 3

Lad os forestille os, at vi har 15 bogstaver a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o og skal bestemme, hvor mange 'ord' med fire forskellige bogstaver, man kan danne.

Når man skal danne 'ord' på denne måde, er rækkefølgen af bogstaverne af betydning.

Det første bogstav kan frit vælges blandt alle 15 bogstaver.

Det andet bogstav kan frit vælges blandt de 14 bogstaver, der endnu ikke er brugt.

Det tredje bogstav kan frit vælges blandt de 13 bogstaver, der endnu ikke er brugt.

Det fjerde bogstav kan frit vælges blandt de 12 bogstaver, der endnu ikke er brugt.

Man kan derfor benytte multiplikationsprincippet til at beregne, at der kan dannes $15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32.760$ forskellige ord.

Dette tal kaldes *antal permutationer af længde 4 fra 15 elementer*, og man skriver kort $P(15,4)$.

Eksempel 4

Vi ser på et 'sportsspil', hvor vi blandt 25 deltagende hold skal gætte på, hvem der kommer på 1., 2. og 3. pladsen. Den teoretiske værdi for antal forskellige udfald af spillet beregnes som $P(25,3)=25\cdot24\cdot23=13.800$.

For at angive en god formel for antal permutationer, behøver vi lidt notation.

Hvis n er et naturligt tal, defineres symbolet $n!$ (læses: *n fakultet*) som $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ dvs. $10! = 10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ og $27!=27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot\ldots\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$.

Hvis vi fx ser på beregningen af $P(15,4)=15\cdot14\cdot13\cdot12$, kan man tænke på $15\cdot14\cdot13\cdot12$ som starten af en endnu længere udregning $15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot\ldots3\cdot2\cdot1$, dvs. 15! Men så må man huske bagefter at dividere $11\cdot10\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$ væk igen:

$$P(15,4)=15\cdot14\cdot13\cdot12=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{11\cdot10\cdot9\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}.$$

Umiddelbart kunne det se ud, som om man er gået fra en relativt simpel beregning af $15\cdot14\cdot13\cdot12$ til et meget mere kompliceret udtryk. I praktisk regning er det da også langt nemmere at beregne $15\cdot14\cdot13\cdot12$ end den brøk, vi netop er kommet frem til. Fordelen ved brøken er til gengæld, at den kan skrives på en meget kort form, hvis man anvender notationen med fakultet. Man får en formel ud af regneudtrykket i brøken, som uden yderligere forklaringer kan viderebringes til andre, der forstår fakultetnotationen:

$$P(15,4)=15\cdot14\cdot13\cdot12=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{11\cdot10\cdot9\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{15!}{11!}=\frac{15!}{(15-4)!}.$$

Tilsvarende kan $P(100,3)$ skrives som:

$$P(100,3)=\frac{100\cdot99\cdot98\cdot97\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}{97\cdot96\cdot95\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1}=\frac{100!}{(100-3)!}.$$

Generelt har man derfor, at *antal permutationer af længde r fra n elementer* kan beregnes ved $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$.

Øvelse 8

1) Bestem, på hvor mange måder man kan stille 20 cd'er på en hylde ved siden af hinanden.

2) I en fodboldturnering deltager 5 hold. Hvor mange forskellige slutstillinger kan turneringen teoretisk set have?

3) I forbindelse med konstitueringen af en bestyrelse, skal der blandt 5 regulære bestyrelsesmedlemmer vælges en kasserer og en sekretær. På hvor mange forskellige måder kan dette ske?

4) Ordet kugle har fem forskellige bogstaver, og der er derfor 5! forskellige rækkefølger at skrive de fem bogstaver på.

Hvor mange af disse har u som det andet bogstav _ u _ _ _?

Hvor mange af disse indeholder bogstavkombinationen "le" som fx i leguk?

5) Du har 10 forskellige perler og skal lave en lukket, 'cirkulær' halskæde – dvs. perlerne er på snor, og snoren er lukket med en knude til en kreds, hvor perlerne kan bevæge sig hen over knuden.

Hvor mange forskellige halslæder kan man lave?

Forestil dig i stedet, at du skal lave en bordplan for 10 personer, 5 mænd og 5 kvinder, som skal sidde ved et rundt bord. Hvor mange forskellige bordplaner kan du lave, hvis det er et krav, at personerne skal sidde skiftevis mand, kvinde, mand, kvinde … ved bordet?

Uordnet udvælgelse uden tilbagelægning

Øvelse 9

I øvelse 7 skulle du opskrive samtlige muligheder for at lægge tre brikker udvalgt uden tilbagelægning fra fire brikker med farverne R(ød), B(lå), H(vid) og G(ul). Der var 24 forskellige rækkefølger, nemlig:

RBH	RBG	RHB	RHG	RGB	RGH
BRH	BRG	BHR	BHG	BGR	BGH
HRB	HRG	HBR	HBG	HGR	HGB
GRB	GRH	GBR	GBH	GHR	GHB

Hvis rækkefølgen ikke længere skal have betydning – vi kan fx forestille os, at brikkerne ikke længere skal ligge på en række, men blot udgøre en 'bunke' – hvor mange forskellige udvalg er der så?

Eksempel 5

Nedenfor er alle permutationer af længde 3 med de fire bogstaver a, b, c, d skrevet

abc	acb	bac	bca	cab	cba
abd	adb	bad	bda	dab	dba
acd	adc	cad	cda	dac	dca
bcd	bdc	cbd	cdb	dbc	dcb

Der er $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ permutationer.

Hvis vi ikke er interesseret i den rækkefølge, bogstaverne står i, men blot interesserer os for, hvilke bogstaver der er tale om, vil mange af permutationerne dække over den samme mulighed.

Permutationerne abc, acb, bac, bca, cab og cba dækker alle over, at der er tale om de tre bogstaver a, b og c. Det er ikke tilfældigt, at der netop er 6 permutationer, der består af bogstaverne a, b og c. Der er jo $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ måder at opskrive bogstaverne a, b og c på, eftersom det første bogstav kan vælges på 3 måder, det andet bogstav kan vælges på 2 måder, og det sidste på 1 måde.

Tilsvarende vil de 6 permutationer abd, adb, bad, bda, dab og dba svare til den samme udvælgelse, når rækkefølgen er uden betydning.

I alt vil der kun være tale om fire forskellige *kombinationer* af bogstaver, nemlig abc, abd, acd og bcd, når rækkefølgen ikke interesserer os, og i listen med permutationer vil disse fire bogstavkombinationer hver dukke op seks gange.

Antallet af måder man, uden tilbagelægning, kan vælge tre bogstaver blandt fire på – uden at rækkefølgen tillægges betydning – betegnes med symbolet $K(4,3)$ og kan beregnes ud fra $P(4,3)$ ved:

$$K(4,3) = \frac{P(4,3)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{\frac{4!}{(4-3)!}}{3!} = \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!}.$$

Mere generelt har man, at hvis man, uden tilbagelægning, skal vælge r elementer blandt n, hvor man ikke interesserer sig for den rækkefølge, elementerne vælges i, bestemmes antallet af forskellige valg ved at beregne

$$K(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}.$$

At formlen for $K(n,r)$ er korrekt, kan man argumentere for ved at observere, at de $P(n,r)$ permutationer kan samles i grupper med hver $r!$ permutationer af de samme r elementer. Hver af disse $r!$ permutationer er udtryk for den samme kombination, så $K(n,r)$ kan beregnes som $\frac{P(n,r)}{r!}$.

Øvelse 10

I lotto skal man vælge syv tal, uden gentagelse, blandt tallene 1, 2, 3, ..., 36.

Hvor mange forskellige lottokuponer er der?

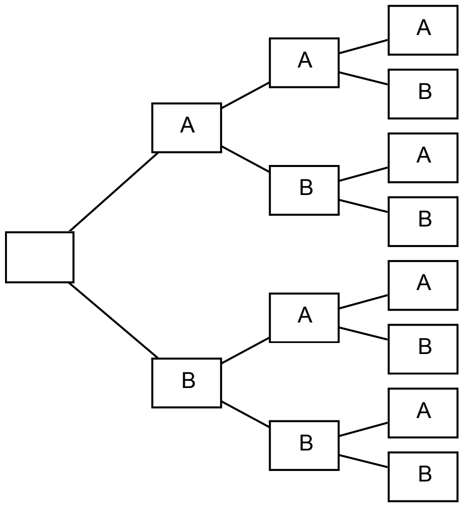
Eksempel 6

Svaret på øvelse 9 er, at der er netop

$K(4,3) = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ muligheder for at vælge tre af de fire farver, når rækkefølgen ikke er af interesse.

I forbindelse med brugen af formlen for $K(n,r)$ kan tallet 0! dukke op i beregningerne. 0! giver ikke umiddelbart mening ud fra definitionen af n! som et produkt, men det har vist sig, at alle udregninger, man kunne have lyst til at udføre, kommer til at give mening, hvis 0! defineres til at være tallet 1.

Eksempel 7



Figur 4.

I et tælletræ som det ovenfor kan man være interesseret i at tælle antallet af 'veje', der fx indeholder A præcis 2 gange. Dette kan $K(n,r)$ hjælpe os til at beregne.

Ved hver forgrening i tælletræet er der mulighed for at vælge enten A eller B. Da der er tre niveauer med forgreninger i det konkrete eksempel, kan man beskrive vejene i tælletræet ved at opremse de valgte forgreninger i rækkefølge. Vælger man at anskue tælletræet på denne måde, kommer vejene til at hedde AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA, BBB. Hvis A skal være valgt præcis to gange, er det et spørgsmål, om at netop to af de tre bogstaver er A, eller med andre ord: Netop to af de tre pladser er valgt (og besat med bogstavet A). Antallet af måder, man kan vælge 2 ud af 3, når rækkefølgen ikke har betydning, er netop $K(3,2) = 3$.

Øvelse 11

$K(n,r)$ kan beregnes nemt ved hjælp af lommeregner, regneark eller matematikprogram. I regneark har man kommandoen "kombin" og i GeoGebra råder man over "nCr".

Beregn $K(10,5)$, $K(33,7)$, $K(100,45)$ med det hjælpemiddel, du foretrækker.

Bestem $K(10,0) + K(10,1) + K(10,2) + \ldots + K(10,10)$.

Bestem $K(n,0) + K(n,1) + K(n,2) + \ldots + K(n,n)$ for forskellige værdier af n. Er der et system?

Øvelse 12

I stokastik-bogen arbejder vi lidt med Pascals trekant. For fuldstændighedens skyld, tager vi også trekanten med i denne fremstilling.

1	K(0,0)
1 1	K(1,0) K(1,1)
1 2 1	K(2,0) K(2,1) K(2,2)
1 3 3 1	K(3,0) K(3,1) K(3,2) K(3,3)
1 4 6 4 1	K(4,0) K(4,1) K(4,2) K(4,3) K(4,4)
1 5 10 10 5 1	K(5,0) K(5,1) K(5,2) K(5,3) K(5,4) K(5,5)
1 6 15 20 15 6 1	K(6,0) K(6,1) K(6,2) K(6,3) K(6,4) K(6,5) K(6,6)

Figur 5.

Pascals trekant er tydeligvis symmetrisk. Eksempelvis er $K(8,3) = K(8,5)$.

Hvorledes ser denne symmetri ud, hvis den skal udtrykkes i en formel af typen $K(n,r)= K(n,\ )$?

Brug regneudtrykket for $K(n,r)$ til at bevise denne symmetriformel.

Man kan også forklare symmetrien i Pascals trekant uden at regne, idet man i stedet benytter et såkaldt kombinatorisk argument. Hvis man skal argumentere for $K(8,3) = K(8,5)$, kan man fx starte sin argumentation således: "Når man vælger 3 ud af 8, er der samtidig 5, som man….". Fortsæt dette til en forklaring, der viser, at $K(8,3) = K(8,5)$.

I stokastik-bogen arbejder vi også med strukturen i Pascals trekant ud fra sammenhængen

$K(n,r) = K(n\text{-}1,r\text{-}1) + K(n\text{-}1,r)$, dvs. at tallet $K(n,r)$ er summen af sine to nabotal fra rækken direkte over.

At $K(n,r) = K(n\text{-}1,r\text{-}1) + K(n\text{-}1,r)$ kan man med lidt besvær vise ud fra formlerne – prøv det. Man kan også argumentere kombinatorisk. Man kan fx argumentere for at

$K(8,5) = K(7,4) + K(7,5)$ ved at starte på følgende måde: "Kald de 8 elementer, vi skal vælge fra, for a, b, c, d, e, f, g og h. Udvælgelserne kan deles op i dem, hvor a er med, og dem, hvor a ikke er med. Hvis a er med, er der 7 andre elementer, hvorfra man skal vælge…"
Fortsæt denne kombinatoriske argumentation og prøv dernæst at generalisere den til en forklaring på den generelle sammenhæng $K(n,r) = K(n\text{-}1,r\text{-}1) + K(n\text{-}1,r)$.

Beregn $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a+b)^5$ etc. Hvilken sammenhæng er der med Pascals trekant?

Hvad får man ud af at lægge alle tallene i en række sammen? Kan du opstille en regel, der udtaler sig om summen af tallene i den n'te række i Pascals trekant? Kan du forklare sammenhængen?

Øvelse 13

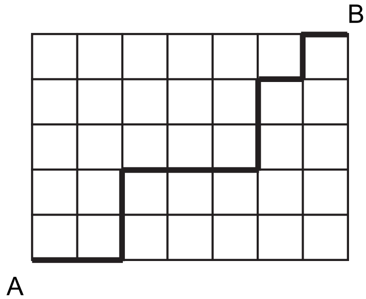
I et sædvanligt spil kort er der 52 kort – 13 hjertere, 13 ruder, 13 klør og 13 spar.

1) Hvis man får to kort, hvor mange muligheder er der så for, at det kan være 2 klør?

2) Hvis man får tre kort, hvor mange muligheder er der så for, at der er tale om 3 røde?

3) Hvis man får fem kort, hvor mange muligheder er der så for, at man får 2 klør og 3 røde?

Øvelse 14



Figur 6.

I gitteret på figuren skal man finde veje af længde 12 fra A til B. Man må kun bevæge sig langs gitterlinjerne.

Hvor mange forskellige veje er der fra A til B?

Ordnet udvælgelse med tilbagelægning

I de to foregående afsnit fik vi analyseret de situationer, hvor udvælgelserne foregår uden tilbagelægning, vi mangler derfor at analysere de situationer, hvor man tillader, at elementer udvælges flere gange undervejs, eller som vi normalt kalder det, hvor udvælgelsen foregår med tilbagelægning.

Eksempel 8

Hvis man må benytte sig af cifrene 1, 2, 3, …, 9 med gentagelser, kan man skrive:
$9 \cdot 9$ forskellige tocifrede tal.
$9 \cdot 9 \cdot 9$ forskellige trecifrede tal.
$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ forskellige fircifrede tal.

Man kan tænke på opskrivningen af tallene som en udtrækning med tilbagelægning.

Forstil dig en pose med ni kugler, nummereret fra 1 til 9. Hvis man trækker en kugle og lader dens talværdi være enere i et tal, lægger kuglen tilbage og trækker endnu en gang fra posen for at bestemme tierne i tallet osv., vil man efter fx fire udtrækninger have et 4-cifret tal, og der kan fremkomme $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ forskellige tal på denne måde.

Eksemplet ovenfor lader sig umiddelbart generalisere.

Hvis man har n elementer, hvorfra man ordnet og med tilbagelægning skal udvælge r elementer, kan dette gøres på $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r \text{ faktorer}} = n^r$ måder, idet man umiddelbart kan benytte multiplikationsprincippet.

Øvelse 15

På en tipskupon er der 13 kampe, hvor man for hver kamp skal angive et af symbolerne 1, X eller 2.

Argumentér for, at man kan betragte det kombinatoriske problem at finde antallet af forskellige tipskuponer som en udvælgelse med tilbagelægning, hvor rækkefølgen er af betydning.

Bestem, hvor mange forskellige tipskuponer man kan opskrive.

Uordnet udvælgelse med tilbagelægning

Den sidste udvælgelsestype, vi skal se på, er den, hvor man tillader, at et element vælges flere gange, men i øvrigt ikke interesserer sig for i hvilken rækkefølge valgene foregår.

Eksempel 9

I en isbod kan man købe 'gammeldags' isvafler med 2 kugler, og der er 7 forskellige slags is at vælge imellem. Umiddelbart kan man hævde, at der kan laves $7^2 = 49$ forskellige is. Hvis man tænker på denne måde, vil en is, hvor første iskugle er chokoladeis, og anden iskugle er jordbær, regnes for forskellig fra en is med første iskugle af jordbæris og anden iskugle med chokoladesmag. Hvis man synes, at de to beskrevne is er 'den samme is', er det fordi, man anser rækkefølgen for ikke at have betydning. Det er den sidste situation, der skal behandles i dette afsnit, og svaret er ikke bare at dividere de 49 med 2, bl.a. fordi "24½ forskellige slags is", jo ikke lyder rigtigt. Svaret kan findes ved hjælp af den efterfølgende sætning.

Sætning 1

Hvis man r gange vælger blandt n forskellige elementer og udvælgelsen foregår med tilbagelægning, kan man opnå $K(n + r\text{-}1,r)$ forskellige uordnede *arrangementer* af disse elementer.

Idet antallet af sådanne arrangementer benævnes $A(n,r)$ gælder altså formlen: $A(n,r) = K(n + r\text{-}1,r)$.

Eksempel 10

I eksempel 9 så vi på, hvor mange forskellige slags 'gammeldags' isvafler med to kugler man kan lave, når der er syv forskellige slags is at vælge imellem. Hvis vi ser bort fra rækkefølgen af iskugler, kan vi nu få svaret på problemet, der er nemlig A(7,2)= $K(7+2-1,2)=K(8,2)=\frac{8!}{(8-2)!\cdot 2!}=28$ forskellige slags isvafler med 2 kugler.

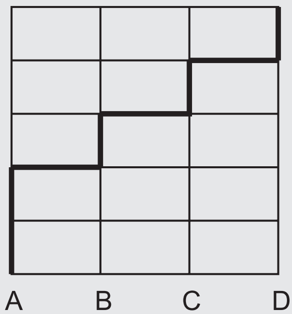
Bevis for sætning 1

Vi vil i det følgende bevise sætning 1, men vælger først at præsentere hovedtanken gennem et eksempel, hvor vi bestemmer $A(4,5)$ Vi skal altså 5 gange udvælge et af 4 elementer, som vi kan kalde A, B, C og D. Det kan lade sig gøre at vælge 5 gange blandt de fire elementer, netop fordi det foregår med tilbagelægning.

Da rækkefølgen ikke spiller en rolle, vælger vi at skrive udvælgelserne op alfabetisk. Det kan fx være AABCD, ABBDD, BBDDD...

Vi skal nu se, hvorledes tankegangen fra øvelse 14 kan bringes i anvendelse i det konkrete problem.

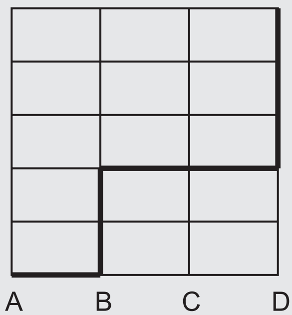
Udvælgelsen AABCD kan repræsenteres som en sti i et gitter, der er 3 bred og 5 høj,



Figur 7.

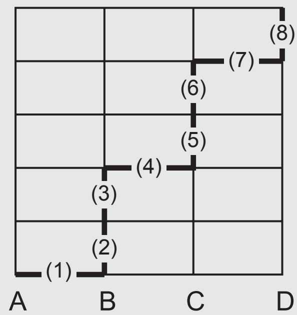
og enhver udvælgelse af fem symboler kan repræsenteres ved en sådan sti fra A til øverste højre hjørne i det samme gitter.

BBDDD repræsenteres som



Figur 8.

Hvis man omvendt har givet en sti i gitteret fx



Figur 9.

så kan den umiddelbart oversættes til en udvælgelse, her BBCCD.

Der er altså det samme antal stier i gitteret, som der er måder, man uordnet og med tilbagelægning kan udvælge fem elementer fra mængden {A, B, C, D}. Så vi har transformeret vores problem om antallet af udvælgelser til at være et problem om antallet af stier i et sådant gitter. Da enhver sådan sti består af 3 + 5 = 8 led, hvoraf de fem skal stå lodret, er antallet af stier lig med K(8,5). For ethvert uordnet udvalg af fem af leddene fremkommer der nemlig en sti af den ønskede type. Den sidst viste sti svarer til, at vi har valgt følgende fem led {2, 3, 5, 6, 8} som de lodrette, idet vi nummererer leddene i rækkefølgen fra den første til den ottende.

Gitterets vandrette bredde vil altid være 1 mindre end antallet af elementer (n), man vælger blandt, altså $n - 1$. Det er fordi, vi identificerer elementerne med de lodrette linjer i gitteret. Gitterets højde svarer til antallet af udvalgte elementer (r).

Derfor kan argumentationen i eksemplet ovenfor umiddelbart generaliseres til den almene situation, hvor der skal vælges r elementer blandt n mulige, som i sætning 1. For her bliver antallet af mulige arrangementer lig med antallet af stier fra nederste venstre hjørne til øverste højre i et gitter af bredden $n - 1$ og højden r. Og da enhver sådan sti svarer til et uordnet udvalg af r elementer blandt stiens $(n - 1) + r$ led, kan det gøres på K($n + r - 1$, r) måder, som hævdet i sætning 1.

Øvelse 16

Når man ganger tal sammen, er rækkefølgen som bekendt ikke af betydning. $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ er det samme som $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$, og i de efterfølgende spørgsmål betragtes de som ens.

Hvis man må bruge tal fra 1 til 10 til at opskrive gangestykker med fire faktorer, hvor mange muligheder er der så, hvis man må bruge samme tal flere gange?

Hvad nu hvis man kun må benytte tallene én gang i gangestykkerne?

Vi kan nu sammenfatte vores resultater om udvælgelser med eller uden tilbagelægning, ordnet eller uordnet. Man vælger *r* elementer blandt *n*.

	Med tilbagelægning	Uden tilbagelægning
Ordnet	n^r	$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$
Uordnet	$A(n,r) = \frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$	$K(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

Øvelse 17

Du har de 3 bogstaver a, b og c.

Opskriv alle måder, man kan repræsentere udvælgelsen af to bogstaver på, når det foregår:
1) ordnet og med tilbagelægning,
2) ordnet og uden tilbagelægning,
3) uordnet og med tilbagelægning og
4) uordnet og uden tilbagelægning.

Øvelse 18

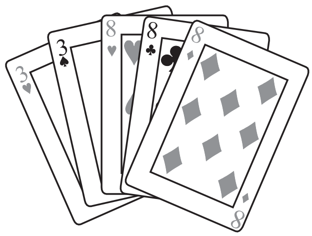
Konstruer opgaver til hver af de fire situationer fra tabellen ovenfor, og lad en medstuderende løse dem.

Øvelse 19

1) I den simplest mulige version af spillet Poker får man 5 kort på én gang.

Hvor mange muligheder er der for at få fire ens, når kortene gives på denne måde? Fire kort kaldes her "ens", hvis de har samme pålydende værdi, men selvfølgelig forskellige kulør, da der ellers er tale om snyd.

Man har 'Fuldt Hus', hvis man har to ens af en slags kort og tre ens af en anden slags, altså fx som i figur 10.



Figur 10.

På hvor mange forskellige måder kan man få 'Fuldt Hus'?

2) Et pizzaria reklamerede med 1001 forskellige pizzaer. Lyder det rimeligt?

Eksempel 11

Lotto
Spillet i dette eksempel er en forsimplet udgave af lotto, hvor man skal trække fire kugler blandt ni kugler, der er nummereret 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 og 9. Udtrækningen foregår uden tilbagelægning, og udtrækningsrækkefølgen er uden betydning. Fx giver udtrækningerne 1, 2, 3, 4 og 1, 2, 4, 3 anledning til de samme vindertal.

Der er i alt $K(9,4) = 126$ forskellige måder at vælge fire tal på. Forestil dig nu, at du vælger fire bestemte tal som dem, du tror bliver vindertallene, og at der efterfølgende bliver udtrukket fire vindertal – for nemheds skyld kan vi antage, at vindertallene er 1, 2, 3 og 4.

Der er kun 1 mulighed for, at du har fået fire rigtige, nemlig hvis de fire tal, du har valgt, er tallene 1, 2, 3 og 4.

Der er flere muligheder for, at du har præcis tre rigtige. Hvis du har tre rigtige, er det fordi, du på din kupon har valgt tre af vindertallene og ét tal blandt de fem tal, der ikke er vindertal. De tre vindertal kan vælges på $K(4,3)$ måder, og de forkerte tal kan vælges på $K(5,1)$ måder. De to valg er uafhængige af hinanden, så multiplikationsprincippet giver, at der er $K(4,3) \cdot K(5,1) = 20$ måder, hvorpå man kan få netop tre rigtige.

Præcis to vindertal kan behandles tilsvarende. Dine to vindertal skal vælges blandt 1, 2, 3 og 4. Dette kan gøres på $K(4,2)$ måder. Når du har præcis to vindertal, er det fordi du også har valgt to tal blandt de 5, der ikke er vindertal. Dette kan gøres på $K(5,2)$ måder. Antallet af måder, der vil give præcis to vindertal, er derfor $K(4,2) \cdot K(5,2) = 6 \cdot 10 = 60$.

Tilsvarende kan man beregne, at antallet af måder, man kan få præcis ét vindertal på, er
$K(4,1) \cdot K(5,3) = 4 \cdot 10 = 40$, og at antallet af måder, man kan få ingen vindertal på, er $K(5,4) = 5$.

Alle kombinationer af fire tal er lige sandsynlige, så vi kan bruge definitionen af sandsynlighed fra Laplaces princip og bestemme:

Sandsynligheden for at få fire vindertal = $\frac{1}{126}$.

Sandsynligheden for at få 3 vindertal = $\frac{20}{126}$.

Sandsynligheden for at få 2 vindertal = $\frac{60}{126}$.

Sandsynligheden for at få 1 vindertal = $\frac{40}{126}$.

Sandsynligheden for at få 0 vindertal = $\frac{5}{126}$.

Øvelse 20

Det sværeste i kombinatorikken er ofte at afgøre, hvilken tællemodel – om nogen – der kan anvendes. Fordel derfor fx ved lodtrækning: multiplikationsprincippet, additionsprincippet, de fire tællemodeller i skemaet på s. 24 og 'ingen tællemodel' mellem et passende antal studerende.

Hver studerende laver en opgave til den model, han eller hun har trukket.

Opgaverne udveksles og løses. Det diskuteres, om der var overensstemmelse mellem hensigt med opgaven og løsningsmodel?