Løsningsforslag til Tal, algebra og funktioner 4.-10. klasse

Bemærk, at vi benytter betegnelsen øvelser som en meget bred betegnelse. Derfor er der også nogle af vores øvelser, der nærmer sig kategorien 'undersøgelser', dem giver vi som oftest ikke løsningsforslag til, ligesom svar til kategorien 'overvej-diskuter' ikke giver megen mening.

Kapitel 1 Genoplev kampen med at forstå positionssystemet

Øvelse 2

a = 111101

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	1
$1 \cdot 2^5$	$1 \cdot 2^4$	$1 \cdot 2^3$	$1 \cdot 2^2$	$0 \cdot 2^1$	$1 \cdot 2^0$

$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 61$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\
 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 \\
- & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Øvelse 3

$41322_V = 4 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 2712_X$.

9823_X omskrevet til base V.

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
3125	625	125	25	5	1
3	0	3	2	4	3
Rest 9823 – 3 · 3125= 448	Rest 448	Rest 448 – 3 · 125 = 73	Rest 73 – 2 · 50 = 23	Rest 23 – 4 · 5 = 3	Rest 0

$9823_X = 303243_V$.

$6512_{VII} = 2312_X$.

$6512_{VII} = 100100001000_{II}$.

Øvelse 4

1) $2EF_{XVI} = 751_{X}$.

2) $ABE_{XVI} + BAD_{XVI} = 166B_{XVI}$. og da $166B_{XVI} - FED_{XVI} = 67E_{XVI} > 0$ er udsagnet korrekt.

Øvelse 5

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Øvelse 6

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & & \cancel{4} & 3 & 2 & 4 \\
+ & & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle 10} & \\
 & \cancel{2} & 2 & 4 \\
- & 1 & 4 & 3 \\
\hline
 & & 3 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \cancel{4} & 3 & 2 & 4 \\
- & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Øvelse 7

$21_{V} \cdot 13_{V} = 323_{V}$.

$24_{V} \cdot 43_{V}$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & {\scriptstyle 3} & & & & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & & & & & \\
 & & 2 & 4 & \cdot & 4 & 3 \\
\cline{3-7}
 & 1 & 3 & 2 & & & \\
2 & 1 & 1 & 0 & & & \\
\cline{1-4}
2 & 2 & 4 & 2 & & &
\end{array}$$

$32_{V} \cdot 33_{V} = 2211_{V}$.

Øvelse 8

·	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Øvelse 9

			2	3					
			1	2					
		1	3	2	4	·	1	4	3
	1	2	0	3	2				
	2	4	1	1	0				
	3	2	4	0	0				
1	1	4	0	4	2				

Øvelse 11

1	1	0	2	:	4	=	1	2	3
	4								
	2	0							
	1	3							
		2	2						
		2	2						
			0						

2	3	2	1	:	1	2	=	1	4	3
1	2									
1	1	2								
1	0	3								
		4	1							
		4	1							
			0							

Øvelse 12

Som man kan se i to-tabellen i base V er lige tal repræsenteret både med ulige og lige slutciffer. Det er derfor ikke nemt at afgøre om 2 går op i et tal opskrevet i base V.

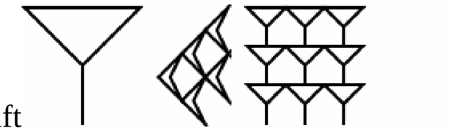
$5_X = 10_V$, og det er derfor nemt at afgøre, om det går op i et tal skrevet i base V. det sker netop, når tallet slutter på 0.

Kapitel 2 At gange og dividere flercifrede tal

Ingen løsningsforslag

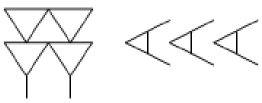
Kapitel 3 Tallenes historiske udvikling

Øvelse 1

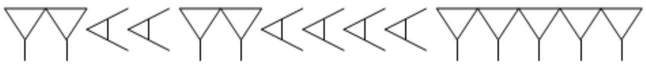
119 skrives sådan i kileskrift 

Øvelse 2

Idet vi benytter friheden i fortolkningen af positionerne til at læse de første fire tegn som tallet 4, hvorefter de næste tre står ‘efter kommaet’ og dermed angiver $\frac{30}{60}$, skrives $4\frac{1}{2}$ som:



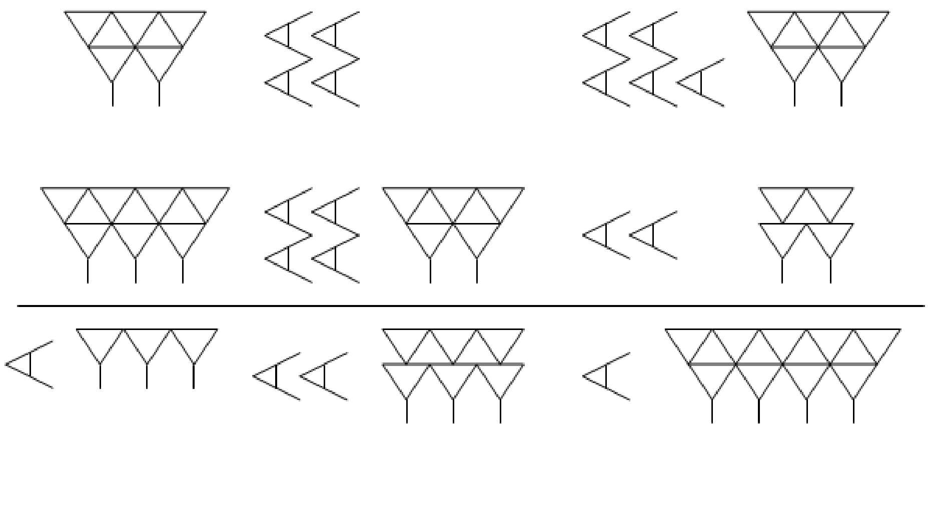
142 skrives med de første seks tegn, og $\frac{3}{4}=\frac{45}{60}$ skrives med de sidste ni tegn, dvs. $142\frac{3}{4}$ skrives som:



Man kan ikke se på dette tal, at det er ca. 140. Det kunne godt tolkes som et tal, der var 60 gange større og for den sags skyld 60 gange mindre osv.

Øvelse 3

5 timer 40 minutter og 55 sekunder kan skrives som den øverste række, 7 timer 45 minutter og 24 sekunder som rækken under. Herefter er additionen ikke vanskelig, resultatet bliver som rækken under stregen: 13 timer 26 minutter og 19 sekunder.



Øvelse 5

1) $8 \cdot 17$

$4 \cdot 34$
$2 \cdot 68$
$1 \cdot 136$

Svar: $8 \cdot 17 = 136$.

2) \37 · 51

18 · 102
\9 · 204
4 · 408
2 · 816
1 · 1632

Svar: $37 \cdot 51 = 51 + 204 + 1632 = 1887$.

Øvelse 6

Arealet af en cirkel med diameter 9 bliver

$$\left(\tfrac{8}{9} \cdot 9\right)^2 = 64$$

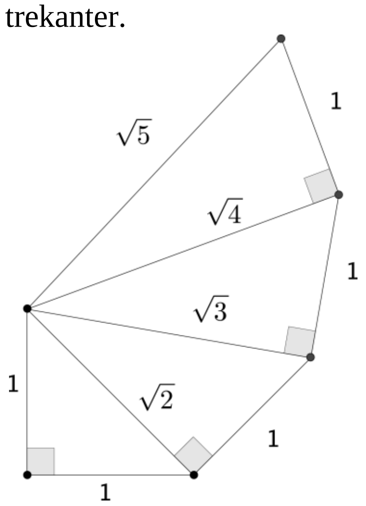
Med moderne matematik får man $\pi \cdot 4{,}5^2 = 63{,}61$.

Omskriver man babylonernes formel får man $\left(\tfrac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \left(\tfrac{8}{9} \cdot 2 \cdot r\right)^2 = \left(\tfrac{16}{9} \cdot r\right)^2 = \tfrac{256}{81} \cdot r^2$, og da

$\tfrac{256}{81} \approx 3{,}16$ kan man hævde, at de benyttede ca. 3,16 som værdi for π.

Øvelse 9

Her er en idé til, hvad man kan gøre, idet man starter med trekanten med kateterne 1 og 1, hvorefter de forskellige kvadratrødder successivt optræder som hypotenuser i de nytilkomne retvinklede trekanter.



Kapitel 4 Læremidler fra regnebog til CAS

Øvelse 2
fx 34 · 676 =33 · 676 + 676 =____
og 43 · 676 =33 · 676 + 10 · 676 =____
Eleven får bl.a. styrket sin opmærksomhed på positionens rolle.
Lidt anderledes med 44 · 444, der fx kan udregnes som 4 ·11 · 111 · 4 =16 · 11 · 111=_____

Øvelse 6

45 · 67 = 3.015 (4 cifre)
Som overslag kan man sige: 50 · 50 = 5 · 5 · 100 = 2.500, dvs. ved brug af lommeregner skal man forvente omkring fire cifre.

På den anden side kan to tocifrede tal godt resultere i et trecifret tal som ved 10 ·10 =100, og i den anden ende giver 99 · 99 = 9801, så antallet af cifre synes ikke at kunne overstige 4.

13 · 876 = 11.388 (5 cifre)
Overslag: 10 · 1.000 = 1 · 1 · 10.000 = 10.000, dvs. man forventer cirka fem cifre. Ser vi på ekstremerne for et tocifret tal gange et trecifret, får vi på den ene side 10 · 100 = 1000, altså et firecifret tal. Går vi til den anden ekstrem, finder vi 99 · 999 = 98901, altså 5 cifre. Hermed har vi faktisk bevist, at et tocifret gange et trecifret tal giver et resultat med enten fire eller fem cifre.

341 · 2.287 = 779.867 (6 cifre)
Overslag: 400 · 2.000 = 4 · 2 · 100.000 = 800.000, dvs. forvente cirka seks cifre.
Men kan et trecifret gange et firecifret tal give 7 cifret resultat? Vi prøver med 999 · 9999 = 9.989.001, så 7 cifre er muligt.

4.472 · 1.946 = 8.702.512 (7 cifre)
Fortsæt selv undersøgelsen. Her har vi to 4-cifrede tal, som ganget samme giver et 7-cifret tal og ikke 4 + 4 = 8 cifre. Men giver det altid enten 7 eller 8, når man har sådan to 4-cifrede tal?

100 · 869 = 86.900 (5 cifre)
Overslag: 100 · 900 = 1 · 9 · 10.000 = 90.000, dvs. forvente cirka fem cifre.

12 · 8 = 96 (2 cifre)
Overslag: 10 · 10 = 1 · 1 · 100 = 100, her ville man så forvente cirka tre cifre, men forhåbentlig godtage et resultat på 96. Ekstremerne er 10 · 1 = 10 og 99 · 9 = 891.

Hvad mon vi kan sige, når et n-cifret tal ganges med et m-cifret tal? Vi kan åbenbart ikke være sikre på, at produktet har $n + m$ cifre. Kan det have $n + m + 1$, $n + m - 1$? Kan vi overbevise os selv om, at den enten giver $n + m$ eller $n + m - 1$ cifre? Hvis vi går tilbage til eksemplerne, er der så tilfælde, hvor vi sikkert kan afgøre, om vi rammer $n + m$, og tilfælde hvor det klart er $n + m - 1$?

Generelt svar på opgaven: Et n-cifret tal ganget med et m-cifret tal giver et resultat med enten $n + m$ eller $n + m - 1$ cifre.

Bevis
10^n er det mindste tal med n + 1 cifre. Så hvis t_n er et n-cifret tal, og t_m er et m-cifret tal, så gælder $10^{n-1} \leq t_n < 10^n$ og $10^{m-1} \leq t_m < 10^m$, og dermed $10^{n+m-2} \leq t_n \cdot t_m < 10^{n+m}$, hvoraf aflæses at $t_n \cdot t_m$ har mindst $n + m - 1$ cifre og højst $n + m$ cifre.

Kapitel 5 De positive rationale tal

Øvelse 7

$\frac{a}{b}$ består af *a* stykker af længde én *b*'endedel. $\frac{c}{b}$ består af *c* stykker af længden én *b*'endedel.
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ består derfor af *a* + *c* stykker af længden én *b*'endedel, hvilket også kan skrives som $\frac{a+c}{b}$.

Øvelse 9

6) Vi har, at $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, og vi skal vise, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$.

Vi ser først på $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$, der ifølge øvelse 4.5 er ensbetydende med ($\Leftrightarrow$)

$a(b+d) \le b(a+c)$, vi ganger ind i en parentes

$\Leftrightarrow ab+ad \le ba+bc$, vi subtraherer $ab = ba$ på begge sider af lighedstegnet

$\Leftrightarrow ad \le bc$ ifølge 5)

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$.

Det sidste var givet at være sandt, så derfor er også det ensbetydende udsagn $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$ sandt.

Tilsvarende for $\frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$, hvorefter vi har vist, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$ er et sandt udsagn og kan konkludere, at hvis man adderer brøker af forskellig størrelse ved at addere tæller med tæller og nævner med nævner, så får man et resultat, der ligger mellem de to brøker, der skulle adderes.
Vi interesserer os i dette kapitel kun for positive brøker. Læseren kan ved en senere lejlighed overveje, om det vi her har vist også gælder, hvis vi tillader negative brøker, som man jo gør i skolen og i samfundet.

7) Vi finder tre brøker, der ligger mellem $\frac{1}{7}$ og $\frac{1}{8}$:

Vi finder en tilstrækkelig stor fællesnævner, således at der ligger tre brøker med den samme fællesnævner mellem de to givne brøker:

$\frac{1\cdot 32}{7\cdot 32}=\frac{32}{224}$ og $\frac{1\cdot 28}{8\cdot 28}=\frac{28}{224}$, og de tre brøker bliver: $\frac{29}{224}$, $\frac{30}{224}$ og $\frac{31}{224}$.

Men vi kunne også have udnyttet vores fund i 6) ovenfor, for den metode fortæller os, at $\frac{1}{8}<\frac{1+1}{8+7}<\frac{1}{7}$, således at vi har fundet en brøk $\frac{2}{15}$ med den ønskede egenskab. Derefter kan vi bruge samme metode igen til at finde en brøk mellem $\frac{1}{8}$ og $\frac{2}{15}$ osv.

Øvelse 16

$$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4+5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{6}=\frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{12}{30}-\frac{5}{30}\right)=\left(\frac{2+3}{4}\right)\cdot\left(\frac{12-5}{30}\right)=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{30}=\frac{7}{24}$$

Øvelse 17

Da måling er en form for division bliver svaret cirka 25 divideret med $\frac{3}{4}$. Ganges i stedet med den omvendte brøk får svaret $\frac{100}{3}$ eller 33 flasker og en tredjedel flaske, hvilket lige akkurat giver os den ønskede smagsprøve.

Øvelse 20

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{\frac{12}{15}+\frac{10}{15}}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{\frac{22}{15}}{\frac{2}{15}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{22}{2}\cdot\frac{2}{22}=1$$

Øvelse 23

Gruppe 1 1500 promille; 1,5; $1\frac{1}{2}$; 1,500; $\frac{6}{4}$; $\frac{84}{56}$; $\frac{12}{8}$; $1\frac{3}{6}$; $6:4$

Gruppe 2 0,75; 750.000 ppm; tre fjerdedele; 750 promille; $\frac{3}{4}$; $\frac{351}{468}$; $\frac{21}{28}$; 75 %; $3:4$

Undersøgelse 1 De omtalte beviser følger her:

Sætning 2

Den uforkortelige brøk $\frac{t}{n}$ kan skrives som et endeligt decimaltal i netop de tilfælde, hvor *n*'s primfaktoropløsning kun indeholder 2 og 5.

Bevis

1) Først viser vi: Hvis $\frac{t}{n}$ er et endelig decimaltal, så indeholder *n*'s primfaktoropløsning kun 2 og 5.

Et endeligt decimaltal bliver til et naturligt tal, hvis den ganges med en passende 10'erpotens.

Hvis derfor $\frac{t}{n}$ kan skrives som et endeligt decimaltal, så er $\frac{T \cdot t}{n}$ et naturligt tal, hvor *T* betegner en passende tierpotens.

n går med andre ord op i $(T \cdot t)$. Det betyder, at hele *n*'s primfaktoropløsning forekommer i $(T \cdot t)$.

Men da $\frac{t}{n}$ var uforkortelig, har *t* og *n* ingen fælles primfaktorer. Derfor må alle *n*'s primfaktorer forekomme i *T*.

Men de eneste primfaktorer, der forekommer i en tierpotens, er 2 og 5. Altså indeholder *n*'s primfaktoropløsning udelukkende primfaktorerne 2 og 5.

2) Dernæst viser vi: Hvis *n*'s primfaktoropløsning kun indeholder 2 og 5, kan $\frac{t}{n}$ skrives som et endeligt decimaltal.

Antag, at $n = 2^a \cdot 5^b$ for naturlige tal *a* og *b*.

Vi vil først vise, at brøken kan forlænges, så den får en tierpotens i nævneren.

Men det er klart, at man ved at gange med en toerpotens eller en femmerpotens bringer *n* op på en tierpotens.

Hvis fx *b* er større end *a*, så vil vi gange *n* med 2^{b-a}, hvilket giver $2^{b-a} \cdot n = 2^a \cdot 5^b \cdot 2^{(b-a)} = 2^b \cdot 5^b = 10^b$.

Vi har altså vist, at vi kan forlænge $\frac{t}{n}$ med et tal (i tilfældet ovenfor med 2^{b-a}), så brøken får en tierpotens i nævneren. Men en brøk med tierpotens er pr. definition en decimalbrøk og kan nemt skrives i den
sædvanlige notation som et endeligt decimaltal med et komma.

Sætning 3

Enhver uforkortelig brøk $\frac{t}{n}$, hvor n indeholder andre primfaktorer end 2 og 5 har en uendelig periodisk decimaltalsfremstilling, og periodelængden er mindre end n.

Bevis

Vi forestiller os, at vi bestemmer decimaltalsfremstillingen for et sådant $\frac{t}{n}$ ved en divisionsalgoritme. Vi ved fra sætning 2, at divisionen aldrig går op. Så ved hver deldivison i den lange division får vi en kvotient, og der vil optræde en rest forskellig fra 0.

Når man dividerer med n, kan der imidlertid kun optræde $n - 1$ forskellige sådanne rester, nemlig 1, 2, 3, …, $n - 1$. Hvis der optrådte en rest større end n, ville vi straks kunne lade n gå op en gang mere.

Derfor vil der undervejs i den lange division på et tidspunkt, senest efter $n - 1$ divisioner, optræde en rest, som man allerede har haft.

Og lige så snart en sådan tidligere rest optræder igen, gentager divisionsmønsteret sig akkurat som første gang, det optrådte, og det vil igen optræde for tredje gang osv.

Resterne vil begynde at optræde i et periodisk mønster, og tilsvarende vil kvotienterne selvfølgelig (cifrene i decimaltalsfremstillingen) optræde i perioder.

Eksempel

Beviset for sætning 3 kan illustreres ved følgende eksempler, hvor vi udregner $\frac{1}{13}$ og $\frac{11}{13}$. Fed skrift angiver rest. Bemærk, at henholdsvis 1 og 11 dukker op som rest igen til sidst, hvilket er kernen i beviset ovenfor.

Eksempel 1 : 13

1 : 1 3 = 0,0 7 6 9 2 3

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
0 & & & & & & \\
\mathbf{1} & 0 & & & & & \\
0 & 0 & & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{0} & 0 & & & & \\
 & 9 & 1 & & & & \\
 & & \mathbf{9} & 0 & & & \\
 & & 7 & 8 & & & \\
 & & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & & \\
 & & 1 & 1 & 7 & & \\
 & & & & \mathbf{3} & 0 & \\
 & & & & 2 & 6 & \\
 & & & & & \mathbf{4} & 0 \\
 & & & & & 3 & 9 \\
 & & & & & & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Eksempel 11 : 13

1 1 : 1 3 = 0,8 4 6 1 5 3

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & 1 & & & & & & \\
 & 0 & & & & & & \\
\mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & & & & & \\
1 & 0 & 4 & & & & & \\
 & & \mathbf{6} & 0 & & & & \\
 & & 5 & 2 & & & & \\
 & & & \mathbf{8} & 0 & & & \\
 & & & 7 & 8 & & & \\
 & & & & \mathbf{2} & 0 & & \\
 & & & & 1 & 3 & & \\
 & & & & & \mathbf{7} & 0 & \\
 & & & & & 6 & 5 & \\
 & & & & & & \mathbf{5} & 0 \\
 & & & & & & 3 & 9 \\
 & & & & & & \mathbf{1} & \mathbf{1}
\end{array}
$$

Øvelse 24

a) $\frac{80}{117}$ kan ikke skrives som et endeligt decimaltal.

Antag, at $\frac{80}{117}$ kan skrives som et endeligt decimaltal som fx 0,6837607, som er det svar, man får på en skolelommeregner. Antag altså, at $\frac{80}{117} = 0{,}6837607$ gælder eksakt. Ved at gange på hver side af lighedstegnet med en passende tierpotens,(som i dette tilfælde skal være 10.000.000), kan vi opnå, at der står et helt tal på højresiden af udtrykket. I den konkrete situation $\frac{80 \cdot 10.000.000}{117} =$ 6.837.607; hvis vi så ganger med 117 på hver side $80 \cdot 10.000.000 = 6.837.607 \cdot 117$.

Men dette kan ikke være muligt, for på højre side har vi 117 som indeholder fx primfaktoren 13. Ser vi nemlig på venstre side, så består 80 af primfaktorerne 2 og 5, og det samme gør enhver tierpotens og derfor specielt 10.000.000. Vi har altså udelukkende 2 og 5 i primfaktoropløsningen på venstre side, mens der står 13 og 3 og sikkert andre grimme ting gemt i det store tal 6.837.607 på højre side. De to sider kan derfor ikke være lig med hinanden. Den sætning, vi bygger på her, er sætningen om primfaktoropløsningens entydighed.

b) $\frac{117}{80}$ kan skrives som et endeligt decimaltal.

Ideen er at opløse 80 i de relevante faktorer:

$$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4 \cdot 5}$$

Så forlænger vi brøken til højre, så vi får en tierpotens i nævneren. Det sker klart nemmest ved at forlænge med 5^3, hvorefter den vi kan fortsætte:

$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4 \cdot 5} = \frac{117 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5 \cdot 5^3} = \frac{117 \cdot 5^3}{2^4 \cdot 5^4} = \frac{117 \cdot 5^3}{10^4} = \frac{14.625}{10.000} = 1{,}4625$ og $\frac{117}{80}$ er dermed omskrevet til et endeligt decimaltal .

Øvelse 25

1) $x = 0,\overline{123}$

$1000 \cdot x = 1000 \cdot 0,\overline{123}$

$1000x = 123,\overline{123}$

$1000x - x = 123,\overline{123} - 0,\overline{123}$

$999x = 123$

$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

2) $q = 0,5\overline{536}$

$10 \cdot q = 10 \cdot 0,5\overline{536}$

$10q = 5,\overline{536}$

$1000 \cdot 10q = 1000 \cdot 5,\overline{536}$

$10.000q = 5.536,\overline{536}$

$10.000q - 10q = 5.536,\overline{536} - 5,\overline{536}$

$9.990q = 5.531$

$q = \frac{5.531}{9.990}$

Kapitel 6 Brøkregning i den fagdidaktiske skole, RME

Ingen løsningsforslag

Kapitel 7 Negative tal og repræsentationer

Ingen løsningsforslag

Kapitel 8 Komplekse tal

Øvelse 1
Hvis $a,b \in \mathbb{Z}$ se da på ligningen $x+a=b.$ Umiddelbart kan vi løse ligningen ved at subtrahere a på hver side, hvilket giver $x=b-a.$ Og da a og b er hele tal er også $x=b-a$ et hel tal.

Øvelse 2
Når vi arbejder med rationale tal a, b og c vil addition, subtraktion, multiplikation og division af disse atter resultere i rationale tal. Når vi ser på ligningen $ax+b=c$ og løser den på sædvanlig vis

$ax+b=c$

$ax=c-b$ $\qquad c-b$ er rational

$x=\dfrac{c-b}{a}$ $\qquad \dfrac{c-b}{a}$ er rational

ender løsningen derfor med at være et rationalt tal.

Øvelse 3
b)

$$\left(2-3\sqrt{-1}\right)x+\left(1-\sqrt{-1}\right)=2 \Leftrightarrow$$

$$\left(2-3\sqrt{-1}\right)x=2-\left(1-\sqrt{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$\left(2-3\sqrt{-1}\right)x=1+\sqrt{-1} \quad \Leftrightarrow$ ved at benytte formlen for invers får at $\left(2-3\sqrt{-1}\right)^{-1}=\tfrac{2}{13}+\tfrac{2}{13}\sqrt{-1}$

$$\left(2-3\sqrt{-1}\right)^{-1}\cdot\left(2-3\sqrt{-1}\right)x=\left(2-3\sqrt{-1}\right)^{-1}\cdot\left(1+\sqrt{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$x=\left(\tfrac{2}{13}+\tfrac{2}{13}\sqrt{-1}\right)\cdot\left(1+\sqrt{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$x=\underline{\underline{-\tfrac{1}{13}+\tfrac{5}{13}\sqrt{-1}}}$$

c)

$$\frac{x}{\left(2-3\sqrt{-1}\right)}+\left(1-\sqrt{-1}\right)=3-7\sqrt{-1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\left(2-3\sqrt{-1}\right)}=3-7\sqrt{-1}-\left(1-\sqrt{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{x}{\left(2-3\sqrt{-1}\right)}=2-6\sqrt{-1} \Leftrightarrow$$

$$\left(2-3\sqrt{-1}\right)\cdot\frac{x}{\left(2-3\sqrt{-1}\right)}=\left(2-3\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2-6\sqrt{-1}\right) \Leftrightarrow$$

$$x=\left(2-3\sqrt{-1}\right)\cdot\left(2-6\sqrt{-1}\right)=\underline{\underline{-14-18\sqrt{-1}}}$$

Øvelse 4

$x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ er på formen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ med a = 3, b = 0 og c = -2

Vi beregner først

$$p = b - \frac{a^2}{3} = 0 - \frac{3^2}{3} = -3$$

$$q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27} = -2 + \frac{2 \cdot 3^3 - 9 \cdot 0 \cdot 3}{27} = 0.$$

$$u = \sqrt[3]{\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{0}{2} \pm \sqrt{\frac{0^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} = \sqrt[3]{\pm\sqrt{-1}} = \pm\sqrt[3]{\sqrt{-1}},$$

hvorefter x kan bestemmes som:

$$x = \frac{p}{3u} - u - \frac{a}{3} =$$

$$\frac{-3}{\pm 3\sqrt[3]{\sqrt{-1}}} - \left(\pm\sqrt[3]{\sqrt{-1}}\right) - \frac{3}{3} =$$

$$\frac{\mp 1}{\sqrt[3]{\sqrt{-1}}} + \left(\mp\sqrt[3]{\sqrt{-1}}\right) - 1 =$$

$$\frac{\mp 1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}} + \left(\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\right) - 1 =$$

$$\frac{\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)}{1} + \left(\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\right) - 1 =$$

$$\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right) + \left(\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)\right) - 1 =$$

$$\mp\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-1} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-1}\right) - 1 =$$

$$-1 \mp \sqrt{3}$$

Metoden finder altså to løsninger $-1 + \sqrt{3}$ og $-1 - \sqrt{3}$.

Undersøgelse 2

Benyttes beregningsformlerne for en retvinklet trekant finder vi *a* + *ib*-formen for de to komplekse tal r_v og s_u og vi kan regne løs:

$$\begin{bmatrix} r_v = r\cos v + ir\sin v \\ s_u = s\cos u + is\sin u \end{bmatrix} \Rightarrow r_v \cdot s_u = rs(\cos v\cos u - \sin v\sin u) + irs(\cos v\sin u - \sin v\cos u) =$$
$$rs\cos(v+u) + irs\sin(u+v) = (rs)_{(u+v)}$$

hvor vi undervejs har benyttet formlerne for sinus og cosinus til en sum af to vinkler.

Vi kan konkludere, at man multiplicere to komplekse tal ved at multiplicere deres modulus og addere deres argumenter.

Kapitel 9 Talteori og reelle tal

Øvelse 1
$91 = 13 \cdot 7$ så 7 går op i 91; kvotienten er 13.

Øvelse 3

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Listen af primtal under 100 er altså 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Øvelse 4
Det ene af tallene (p, p + 1) er lige. Det eneste lige primtal der findes er 2. Derfor kan der kun findes ét sæt primtalsnaboer, nemlig (2,3).

Når p er ulige, vil der blandt tallene (p, p + 2, p + 4) altid være ét, der ligger i 3-tabellen, fordi det er åbenlyst, at et af de tre på hinanden følgende tal (p, p + 1, p + 2) må ramme 3-tabellen, og hvis det er p + 1, så vil p + 4 også gøre det. Da det eneste primtal i tretabellen er selve 3, kan der kun være det ene sæt primtalstrillinger (3, 5, 7).

[Da der ikke findes primtalstrillinger findes der heller ikke primtalfirlinger, men der findes nogle dobbelttvillinger af formen (p, p + 2, p + 6, p + 8). Hvis du selv prøver at finde sådanne, vil du sikkert falde over de samme tal som dem på Ishango-knoglen, side 48 i lærebogen. Da disse er 20.000 år gamle kan dette sammenfald give anledning til mange og store tanker. For mere information googles på "prime quadruplets"]

$f(n) = n^2 - n + 41$ ser ud til at give primtal, når man sætter forskellige n-værdier ind. Imidlertid er $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ og dermed et sammensat tal.

Er der nogle af funktionsværdierne $f(n)$, n = 1, 2, ..., 40, der ikke er primtal?

Øvelse 5

Det ser ud som om $\dfrac{x}{\pi(x)}$ stiger med ca. 2,3 hver gang. Derfor er det bedste bud, at $\dfrac{10^{13}}{\pi(10^{13})} = 28{,}9$ så $\pi(10^{13}) \approx 10^{13} : 28{,}9 \approx 346.020.761.246$. På hjemmesiden http://primes.utm.edu/howmany.shtml kan man finde det præcise antal 346.065.536.839.

Øvelse 6

sfd(330,77):

		Rest
330	77	22
77	22	11
22	11	0

sfd(330,77) = 11.

Øvelse 7

25 · (-2) + 17 · 3 = 1.

Undersøgelse 1

1) $17x + 25y = 1$

Da sfd(25,17) = 1 findes der ifølge sætning 3 løsninger til ligningen.

2) $15x + 25y = 6$

Da sfd(25,15) = 5 findes der ifølge sætning 3 løsninger til ligningen $15a + 25b = 5$. Hvis der også fandtes en løsning til $15x + 25y = 6$, ville vi have $15(x – a) + 25(y – b) = 1$. Men det ville betyde, at sfd(25,15) = 1 og er derfor en modstrid. Der findes derfor ingen løsninger til $15x + 25y = 6$.

3) $42x + 33y = 6$

Da sfd(42,33) = 3 findes løsninger til ligningen $42a + 33b = 3$.
$x = 2a$ og $y = 2b$ er derfor løsning til $42x + 33y = 6$.

4) $65x + 91y = 6$

sdf(91,65) = 13 og derfor findes en løsning til $65a + 91b = 13$. Hvis der også findes løsninger til $65x + 91y = 6$, ville $(a – 2x)$ og $(b – 2y)$ opfylde $65(a – 2x) + 91(b – 2y) = 1$, hvilket ville betyde, at sfd(91,65) = 1. Det er en modstrid, så der kan ikke være løsninger til $65x + 91y = 6$.

5) $462x + 121y = 11$

Denne ligning har en løsning da sfd(462,121) = 11.
6) $462x + 121y = 23$

Denne ligning har ingen løsning. I kombination med løsningen til 5 ville det give en løsning til ligningen $462x + 121y = 1$, hvilket ville betyde, at sfd(462,121) er 1.

Øvelse 8
Hvis $p \mid a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ kan man, ved at sætte parenteser, tænke på det som om $p \mid a_1 \cdot \left(a_2 \cdot ... \cdot a_n\right)$. Fra sætningen ved vi nu, at $p \mid a_1$ eller $p \mid a_2 \cdot ... \cdot a_n$. Hvis $p \mid a_1$ har vi bevist, at *p* går op i den ene af faktorerne. Hvis *p* ikke går op i a_1 ved vi $p \mid a_2 \cdot ... \cdot a_n$. Ved at sætte parenteser igen, kan vi så komme frem til, at $p \mid a_2$ eller $p \mid a_3 \cdot ... \cdot a_n$. Enten kan vi så konkludere $p \mid a_2$, eller vi kan sætte endnu en parentes.

Da der er et endelig antal faktorer, må argumentationen slutte på et tidspunkt, og vi kan konkludere, at *p* går op i mindst en af faktorerne.

Øvelse 9
$18 = 2 \cdot 3^2$

$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$

$143 = 11 \cdot 13$.

Øvelse 10

1)$75 = 3 \cdot 5^2$ og $12 = 2^2 \cdot 3$. Derfor er de begge på formen $p \cdot q^2$ og har divisorerne1, p, q, $p \cdot q$, $p \cdot q^2$.

2) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Divisorerne er derfor $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0, ..., 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$
I alt er der 16 divisorer i tallet 210, nemlig tallene 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

3) $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ og $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ har alle 12 divisorer.

4) Tal med netop 2 divisorer er primtal.

5) Hvad kan du fx sige om tal med præcis tre divisorer?

Øvelse 11

1) Der er $3 \cdot 4 = 12$ divisorer.

2) De 8 divisorer er $p^0q^0r^0$, $p^1q^0r^0$, $p^0q^1r^0$, $p^0q^0r^1$, $p^1q^1r^0$, $p^1q^0r^1$, $p^0q^1r^1$ og $p^1q^1r^1$.

3) Divisorer i p^n er 1, p , $p^2,..., p^{n-1}$, p^n dvs. i alt $n + 1$ divisorer.

4) Overlades til læseren.

5) Fra punkt 4 ved vi, at $p^x \cdot q^y \cdot ... \cdot r^z$ har $(x + 1)(y +1) \cdot ... \cdot (z + 1)$ divisorer, når $p, q, ..., r$ er primtal.

$(x + 1)(y + 1) \cdot ... \cdot (z + 1)$ kan kun give 11, hvis alle faktorer på nær én er 1, og den sidste er 11.

Derfor må det eftersøgte tal være et primtal opløftet i 10 potens.

$2^{10} = 512$ og der er således ikke 'plads' til større primtal opløftet i 10 potens. Det eftersøgte tal er derfor 512.

Øvelse 12

1) sfd(72,25)

Da $72 = 2^3 \cdot 3^2$ og $25 = 5^2$ er sfd(72,25) = 1. I mfm(72,25) skal alle primfaktorerne indgå med maksimal vægt. Dvs. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

2) Hvis forskellen skal være lille, skal de to tal indeholde de samme primfaktorer med fx kun et 2-tal som afvigelse. Fx $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ og $3^3 \cdot 5^2$. sfd af de to tal er $3^3 \cdot 5^2$ og mfm er $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

4) Dette argument kan holdes på mindre symbolkrævende plan, hvis man konstaterer, at $a \cdot b$ indeholder alle de forekommende primfaktorer i a og b, men det gør mfm(a,b) også, idet dog de primtal, der er fælles for a og b, ikke kommer med to gange, men de kommer med i sfd(a,b), hvor de netop kommer med i den lavere potens, der blev udeladt i mfm(a, b). Derfor kommer alle primfaktorer i a og b med i den rette potens, når man multiplicerer mfm(a,b) og sfd(a,b)

Øvelse 13

Du kan blot kopiere beviset for sætning 6, efter at 2 overalt erstattes med 17. Det samme kan du gøre med ethvert tal x, som ikke er et kvadrattal eller kvadratet på en brøk, se øvelse 14.

Øvelse 14

Antag, at $\sqrt{n}$ er et rationalt tal $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, hvor brøken er forkortet mest muligt.

Som i beviset for sætning 6 får vi så, at $n = \frac{p^2}{q^2}$ er en uforkortelig brøk, og dermed (atter som i beviset for sætning 6) at $n = p^2$. Den eneste situation, hvor dette ikke giver anledning til en modstrid, er hvis *n* er et kvadrattal.

Altså er $\sqrt{n}$ irrational på nær, når *n* er et kvadrattal.

Øvelse 15

Problemet er, at vi får en lang række cifre, som er 9, men vi kan ikke vide om vi evt. får en mente fra den del af de uendelige decimaltal, som der ikke er medtaget. Hvis vi får det, så ændrer det alle 9-tallerne til et 0 og en mente føres hen til 4 + 0, som så vil give 5. Vi kan ikke vide, hvad det er det rigtige resultat, og bemærk, at det ikke vil hjælpe os at få endnu flere cifre med, hvis de også resulterer i 9 som sum. Hør mere på den i fodnoten angivne adresse.

Øvelse 16

Cantors tal er ikke med på den nummererede liste. Antag, at tallet var med som fx a_k. Så skulle vi have $b_k = a_{kk}$, men det kan ikke passe, for enten er $a_{kk} = 1$, eller også er $a_{kk} \neq 1$. I det første tilfælde ville vi så have $b_k = 9$ og i det andet $b_k = 1$, og det fremgår klart, at vi ikke har $b_k = a_{kk}$ under nogen omstændigheder. Altså er Cantors tal *b* ikke med på den nummererede liste. De reelle tal mellem 0 og 1 er ikke nogen tællelig mængde.

Kapitel 10 Algebras stofdidaktik

Øvelse 3

Idet vi skriver F for falsk og S for sand, får vi:

$a^2 \geq a$, F

$\sqrt{a} \leq a$ (forudsat a > 0), F

$\frac{11a+7}{6a} = \frac{11+7}{6} = 3$, F

$\frac{a}{c} : \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$, F

$\sqrt{a^2 \cdot 16} = a \cdot 4$, hvis a er positiv, S

$\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$, hvis a er positiv, F

$b^3 + b^4 = b^7$, F

$4a^2 \cdot 2b^2 = 8a^2b^2$ S

$4a^2 + 2b^2 = 6a^2b^2$, F

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}} = \frac{a}{b+c}$, for a, b og c positive, F

Øvelse 12

A = artillerister, K = kavalerister og I = infanterister

A = 3K

I = 4A

3520 = A + I + K = A + 4A + $\frac{1}{3}$ A

3520 =5$\frac{1}{3}$ A

A = 660, I = 2640, K = 220

Øvelse 13

$((x+6) \cdot 2 - 2) : 2 - x =$

$(2x + 12 - 2) : 2 - x =$

$(2x + 10) : 2 - x =$

$x + 5 - x$

5

Øvelse 14

Fx: “Hvorfor får du sytten, hvis du tænker på et tal, som du firedobler, før du lægger 10 til og halverer resultatet, som du nu lægger 9 til, før du halverer endnu en gang for til sidst at trække det oprindelige tal fra og lægge 10 til?”.

Kapitel 11 Funktioner og funktionsbegrebet

Øvelse 7

1) $y = 3,5x$
2) $y = \frac{14}{x}$
3) $y = 2x + 3$

1) billedmængde $[14, \infty[$

2) billedmængde $\left]0, 3\tfrac{1}{2}\right]$

3) billedmængde $[11, \infty[$

Øvelse 8

1) Den direkte proportionalitet *f*, hvor $f\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{3}{5}$, angives:

$x = \frac{22}{7}$ og $f(x) = \frac{3}{5}$ indsættes i $f(x) = ax$,
hvilket giver $f(x) = \frac{21}{110}x$.

2) Den omvendte proportionalitet *g*, hvor $g\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{3}{5}$, angives:

$x = \frac{22}{7}$ og $g(x) = \frac{3}{5}$ indsættes i $g(x) = \frac{k}{x}$,hvilket giver $k = \frac{66}{35}$ og dermed $g(x) = \frac{66}{35} \cdot \frac{1}{x}$.

3) Den lineære funktion, hvis graf indeholder punkterne $\left(\frac{22}{7}, \frac{3}{5}\right)$ og $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$findes:

Hældningskoefficienten α findes ved at indsætte punkternes koordinater i $\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, hvilket giver $\alpha = -\frac{126}{335}$.

α samt det ene punkts koordinater indsættes i : $y = \alpha x + b$,
hvilket giver $y = h(x) = -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335}$.

4) a. Billedmængden for f svarende til $x \le 0$: Vi har $f(x) = \frac{21}{110}x$. For $x \le 0$ bliver højre side negativ eller 0, dvs. billedmængden af $x \le 0$ bliver det negative reellele tal samt 0, eller udtrykt i mængdelærens sprog: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 0\}$.

b. Billedmængden for g svarende til $x \le 0$: Vi har $g(x) = \frac{66}{35} \cdot \frac{1}{x}$. Her må vi undgå $x = 0$ for at undgå x i nævneren. Men $x < 0$ svarer til at x gennemløber alle negative tal, hvilket er ens-betydende med, at $\frac{1}{x}$ gennemløber alle negative tal og dermed også, at $g(x)$ gennemløber alle negative tal. Billedmængden bliver altså de negative reelle tal eller i mængdelærens sprog: $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

c. Billedmængden for h når $x \le 0$: Vi har $h(x) = -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335}$.

Tænker vi på det som en ret linje med negativ hældning, der skærer y-aksen i punktet $(0, \frac{597}{335})$ får vi, at det, der ligger i 2. kvadrant og over den rette linje, udgør billedmængden. Mere præcist bliver billedmængden $\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge \frac{597}{335}\}$.

Dette kan også skrives detaljeret med brug af de regler der gælder for manipulation med uligheder og som vi så på i forrige kapitel:

$$x \le 0 \Leftrightarrow \frac{126}{335}x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335} \ge \frac{597}{335} \Leftrightarrow h(x) \ge \frac{597}{335}$$

Øvelse 9

Lineær funktion. x angiver antal km. pris(x) = $30x + 20$.

Øvelse 12

Det viser sig, at der i værste tilfælde skal tre punkter til at afgøre, om der er tale om en ligefrem proportionalitet: $f(x) = x$, en omvendt proportionalitet: $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \neq 0$ eller den lineære funktion: $f(x) = ax + b$.

Hvis man ved, hvilken af de tre typer der er tale om, er det nok med to punkter. Så ud fra to punkter kan man få fastlagt helt konkret, hvilken funktion der kan være tale om inden for hver kategori.

Er man usikker på, hvilken type der er tale om, indsætter man det tredje punkt i hver af de mulige, og det vil kun stemme i en af dem, hvorefter man har bestemt typen og kan fastlægge den konkrete funktion.
Der kan blive problemer med specialtilfælde, så lad os præcisere, at vi ikke regner $y = \frac{k}{x}$ for en omvendt proportionalitet, hvis *k*=0.

At to forskellige typer af disse funktioner ikke kan skære hinanden i tre forskellige punkter er indlysende ud fra grafernes geometriske form, men det bliver lidt mere besværligt, hvis man skal vise det algebraisk.

Kapitel 12 Ligninger og problemløsning

Øvelse 1

1)

$$x \cdot 3 - 1 = 25 + x$$
$$2x = 26$$
$$x = 13$$

2) Den korrekte ligning er

$$3x = \tfrac{1}{2}O$$

3) De to aldre kaldes *x* og *y*.

$x + y = 24$ og $y = x + 6$

Indsættes den ene ligning i den anden får man

$$x + x + 6 = 24$$
$$x = 9$$

Dvs. brødrene er hhv. 9 og 15 år gamle.

4) Hvis man kalder den korte side *x*, er den lange side 3*x*. Den samlede omkreds er derfor 8*x* og vi får *x* = 11,25. Siderne er altså 11,25 cm og 33,75 cm.

5) *d* er antal dage. Omkostningerne er $800 + 300d + d \cdot 10 \cdot 4 = 340d + 800$

Der skal derfor gælde

$$340d + 800 \leq 400$$
$$d \leq 9,41$$

så turen kan maksimalt vare i 9 dage.

6) *S* er søslangens længde.

Der gælder

$$S = 40 + \tfrac{1}{2}S$$
$$\tfrac{1}{2}S = 40$$
$$S = 80$$

Søslangen er 80 meter.

Øvelse 2

$A-3=B$.

$C=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}(A-3)$.

Indsættes dette i $A+B+C=28$ får man:

$A+A-3+\frac{1}{2}(A-3)=28$

$\frac{5}{2}A-\frac{9}{2}=28$

$\frac{5}{2}A=\frac{65}{2}$

$A=13.$

B og *C* bestemmes så til *B* = 10 og *C* = 5.

Eller

$2C=B$

$A=B+3=2C+3$.

Indsættes dette i $A+B+C=28$ får man:

$A+B+C=28$

$2C+3+2C+C=28$

$5C=25$

$C=5$

A og *B* bestemmes så til *A* = 13 og *B* = 10.

Øvelse 5

Kuglen har rumfang $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ og overfladereal $4\pi r^2$, hvor *r* er kuglens radius.

$V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ eller $r=\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}V}$ og $A=4\pi r^2$ eller $r=\sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}$

1)

a) $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\dfrac{A}{4\pi}}\right)^3$

b) $A=4\pi r^2=4\pi\left(\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}V}\right)^2$

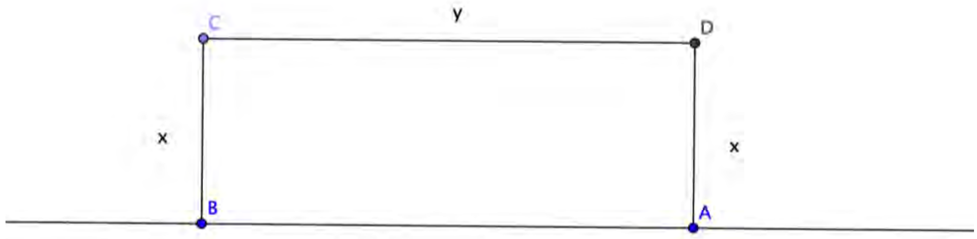
c) $O=2\pi r$ eller $r=\dfrac{O}{2\pi}$. Rumfanget er derfor $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{O}{2\pi}\right)^3$

d) $A=4\pi r^2=4\pi\left(\dfrac{O}{2\pi}\right)^2$

Øvelse 6

Pyramidestubbens rumfang er $\frac{1}{3}h(G+g+\sqrt{gG})$. Hvis der i virkeligheden er tale om et prisme er G og g ens. Formlen bliver da $\frac{1}{3}h(G+G+\sqrt{GG})=\frac{1}{3}h(G+G+G)=hG$,
hvilket netop er formlen for prismets rumfang.

Øvelse 8



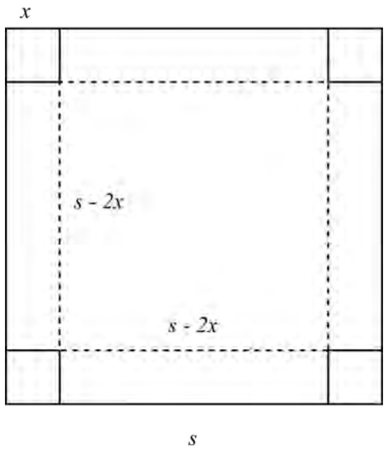
Areal $x \cdot y$ og $2x + y = 400$. Indsættes y = 400 – 2*x*, ser vi, at det er udtrykket:
$x\cdot(400-2x)=-2x^2+400x$, der skal optimeres.

Det kan ske på en af måderne nævnt i teksten. Man kan også observere, at der er tale om et andengradspolynomium, hvis grafiske billede er en parabel, der ifølge formelsamlingen har toppunkt for $x=\frac{-b}{2a}=\frac{-400}{-4}=100$.

Det optimale rektangel bliver dobbelt så langt som bredt, hvilket ikke er så forbavsende, for hvis også ejeren af nabogrunden lavede en tilsvarende optimal rektangulær indhegning, så ville de to tilsammen danne et kvadrat, som vi har fundet som optimal form på friland.

Undersøgelse 2

Hvis papirets bredde er *s*, og vi folder stykket *x* op som kant, kan situationen beskrives med denne tegning:



Rumfanget er $x(s-2x)^2$.
Herefter findes ekstremalværdierne for rumfanget ved fx at sætte differentialkvotienten lig med 0, hvilket giver de to løsninger $x = ½s$ og $x = \frac{1}{6}s$, hvor den første er minimum og den sidste maksimum. På skoleniveau sætter man en numerisk måleværdi ind for *s* og laver i et regneark en liste over rumfanget som funktion af siden *x*. Heraf udpeget maksimum let.

Øvelse 9

4) $2\pi x + 17\pi = 39\pi,\ x = \dfrac{22\pi}{2\pi} = 11$

5) $\left(\sqrt{3}-1\right)x+4=4\sqrt{3},\ x=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}=4$

6) $\left(\sqrt{3}-1\right)x+4=6,\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\dfrac{2\sqrt{3}+1}{3-1}=\sqrt{3}+1$

Øvelse 12

Her giver vi et eksempel på løsning af tre ligninger med tre ubekendte ved substitutionsmetoden.

(1) $2x + 5y + 10z = 65$
(2) $x + y + z = 17$
(3) $3x + 7y + 2z = 69$

Vi starter med en ligning hvor vi kan få et simpelt udtryk for en af de variable ud fra de to andre, fx i (2), hvor vi kan finde z udtrykt ved x og y: $z = 17 - x - y$.

Dette udtryk for z indsættes nu i (1) og (3), hvorved hele ligningssystemet reduceres til to ligninger med to ubekendte:

Vi indsætter $z = 17 - x - y$ i (3) og får $3x + 7y + 2(17 - x - y) = 69$ eller $x + 5y = 35$.

Vi indsætter så $z = 17 - x - y$ i (1) og finder x udtrykt ved y: $2x + 5y + 10(17 - x - y) = 65$ eller
$8x + 5y = 105$

Vi har altså reduceret ligningssystemet til to ligninger med to ubekendte:
I: $x + 5y = 35$
II: $8x + 5y = 105$

De løses på en af de flere måder – fx ved fra I at indsætte $x = 35 - 5y$ i II , hvorved vi får:

$8(35 - 5y) + 5y = 105$, hvilket giver $35y=175$ eller $y = 5$.

Indsat i I fås $x=10$, hvorefter z findes af: $z = 17 - x - y$ til at være 2.

I opgaven får vi oplyst, at $x = y \cdot z$. Dette tjekkes: $10 = 5 \cdot 2$, hvilket er korrekt. Men vi kunne med større ret have ‘gjort prøve’ ved at indsætte de tre løsninger i de oprindelige ligninger, hvilket også stemmer.

Øvelse 16
Gang fx den første ligning med 7 og den anden ligning med 3, og træk dem derefter fra hinanden.

Øvelse 17

$3x + 2y = 38$

$7x - 4y = 2$

Af den første ligning kan vi finde at $2y = 38 - 3x$. Dette kan vi indsætte i den anden ligning:

$7x - 4y = 2$

$7x - 2(2y) = 2$

$7x - 2(38 - 3x) = 2$

$7x - 76 + 6x = 2$

$13x = 78$

$x = 6$

x-værdien indsættes nu i $2y = 38 - 3x$, og vi har $2y = 38 - 3 \cdot 6 \Rightarrow 2y = 20 \Rightarrow y = 10$.

Kapitel 13 Rentesregning

Øvelse 1

1) Hvor meget vokser saldoen til efter 20 terminer?

2) Hvor mange terminer går der, inden saldoen når over 2.000 kr.

3) Hvor stor skal startkapitalen være, hvis saldoen skal være mindst 2.000 kr. efter 18 terminer?

4) Hvis startkapitalen på 667 kr. er vokset til 1.500 kr. efter 12 terminer, hvor stor er så rentefoden?

Rentefod	0,05
Startkapital	677
Tidspunkt	
0	677,00
1	710,85
2	746,39
3	783,71
4	822,90
	.
.	.
.	.
.	
17	1.551,70
18	1.629,28
19	1.710,75
20	1.796,28
21	1.886,10
22	1.980,40
23	2.079,42
24	2.183,39

Svarene på 1) og 2) kan aflæses i tabellen til venstre.
Efter 20 terminer er saldoen1.796,28 kr. og saldoen overstiger 2.000 kr. efter 23 terminer.

3) Ved at eksperimentere med andre værdier af startsaldoen kan man finde frem til, at en startsaldo på 831,04 kr. giver en saldo på 2.000 kr. efter 18 terminer.

4) Ved at eksperimentere med at ændre rentefoden finder man, at en rentefod på ca. 6,9 % giver den ønskede saldo efter 12 terminer.

Øvelse 2

Løsningen til ligningerne er de tal, vi fandt i øvelse 1.

Hvis vi skal løse ligningerne analytisk, kan vi gøre således:

ad 2)

$$2.000 = 667 \cdot (1+0,05)^n$$

$$\frac{2.000}{667} = (1+0,05)^n$$ tag logaritmen på begge ider

$$\log\left(\frac{2.000}{667}\right) = \log\left((1+0,05)^n\right)$$ brug regnereglen $\log(a^n) = \mathrm{n} \cdot \log(a)$

$$\log\left(\frac{2.000}{667}\right) = n \cdot \log\left(1+0,05\right)$$

$$\log\left(\frac{2.000}{667}\right) \Big/ \log\left(1+0,05\right) = n$$

$$n = 22,50$$

Dvs. saldoen er 2.000 kr. efter 22,5 – altså efter 23 terminer.

ad 3)

$$2.000 = K_0 (1+0,05)^{18}$$

$$K_0 = \frac{2.000}{(1+0,05)^{18}} = 831,04$$

Startsaldoen skal altså være 831,04 kr.

ad 4)

$$1.500 = 677 \cdot (1+r)^{12}$$

$$\frac{1.500}{677} = (1+r)^{12}$$

$$\sqrt[12]{\frac{1.500}{677}} = 1+r$$

$r = \sqrt[12]{\frac{1.500}{677}} - 1 = 0,0685$ eller 6,9 %, som vi også fandt i opgave 1.

Øvelse 5

Antal rentetilskrivninger	effektiv rente
2	5,0625 %
12	5,1162 %
52	5,1246 %
365	5,1267 %
1.000	5,1270 %
10.000	5,1271 %
50.000	5,1271 %

De relevante tal kan læses i tabellen. De er udregnet som vist i eksempel 5.

Når n bliver større og større, ser der ud til at være et loft over, hvor stor den effektive rente er. Det er ikke noget tilfælde, da man generelt kan vise, at den effektive rente er:

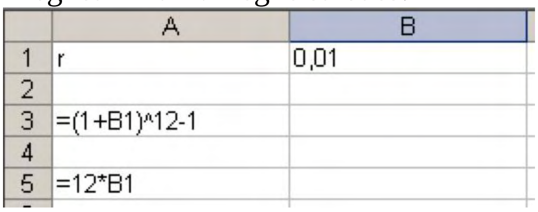
$e^{0,05}$ -1 = 0,05127,

når man tilskriver 5% i rente med uendelig mange tilskrivninger pr. termin.

Øvelse 6

12 tilskrivninger af renten resulterer i en effektiv rente på 7 %.

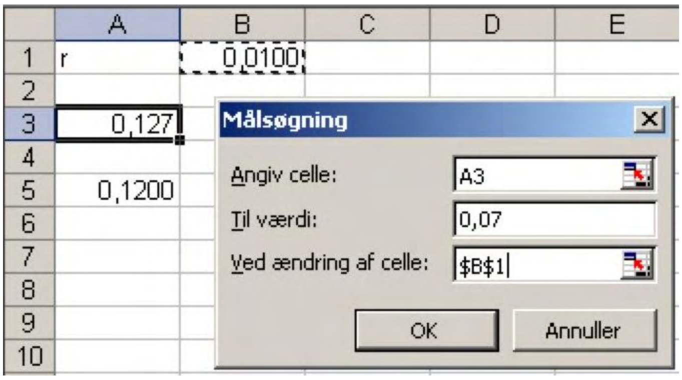
I regneark kan vi regne således:



	A	B
1	r	0,01
2		
3	=(1+B1)^12-1	
4		
5	=12*B1	

hvor vi i første omgang blot sætter den nominelle rentefod pr. termin til 1% (i celle B1).

Ved hjælp af målsøgning:



bestemmes den nominelle rente til:

	A	B
1	r	0,0057
2		
3	0,070	
4		
5	0,0681	

6,81 %

Vi kan også beregne den månedlige rente *r* ved at løse ligningen

$$(1+r)^{12}-1=0,07$$

$$r=\sqrt[12]{1,07}-1=0,0057,$$

svarende til en årlig nominel rente på $12\cdot 0,0057=0,0684$. At regnearket svarer 0,0681 skyldes afrundinger undervejs.

Øvelse 7

Tankegangen er, at man blot tilskriver rente svarende til den brøkdel af terminen, som beløbet har stået på kontoen. $\frac{b}{T}$ er netop den brøkdel af en hel termin, som beløbet har stået på kontoen.

Øvelse 9

Ydelse	1500,00
Rentefod	0,05
Tid	
1	1500,00
2	3075,00
3	4728,75
4	6465,19
5	8288,45
6	10202,87
7	12213,01
8	14323,66
9	16539,85
10	18866,84
11	21310,18
12	23875,69
13	26569,47
14	29397,95
15	32367,85

Udviklingen i saldoen ses i tabellen.

1) Efter 10 terminer er saldoen 21.310,18 kr.

2) Saldoen overstiger 30.000 kr. efter 14 terminer.

3) Ved at benytte målsøgning på saldoen efter 12 terminer, og med ydelsen som den variable finder man, at ydelsen skal være 1.411,39 kr. for, at man når op på 25.000 kr. i den 12 termin.

4) Ved at benytte målsøgning på saldoen efter 12 terminer, og med rentefoden som den variable finder man, at renten skal være 4,03 % for, at man når op på 25.000 kr. i den 12 termin.

Øvelse 11

Vi vil her vise, hvorledes formlen $A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan omskrives til at finde svar på 2) og 3). Det kan ikke lade sig gøre at finde en formel, der giver svar på 4). Dér skal man have fat i regnearket eller som i 'gamle' dage i en tabel.

2)

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$
$$r \cdot A_n = y \cdot \left((1+r)^n - 1\right)$$
$$\frac{r \cdot A_n}{(1+r)^n - 1} = y$$

3)

$$A_n = y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$
$$\frac{r \cdot A_n}{y} = (1+r)^n - 1$$
$$\frac{r \cdot A_n}{y} + 1 = (1+r)^n$$
$$\sqrt[n]{\frac{r \cdot A_n}{y} + 1} = 1 + r$$
$$\sqrt[n]{\frac{r \cdot A_n}{y} + 1} - 1 = r.$$

Øvelse 12

Vi ønsker at bestemme den nødvendige månedlige ydelse.

I 30 år = 12·30 = 360 måneder sættes *y* kr. ind på kontoen.

Herefter trækker saldoen blot renter i de sidste 10 år inden pensioneringen, dvs. i 120 måneder.

Rentetilskrivningen er med $\frac{5}{4}$ = 1,25 % pr. kvartal. Dette svarer til en effektiv månedlig rente på $\sqrt[3]{1,0125} - 1 = 0,004149$.

a) Hvis vi regner med denne effektive rente for at bestemme rentetilskrivningen undervejs i kvartalerne - hvor nogle af pengene ikke står på kontoen i en hel termin – bliver udregningerne:

Opsparingen: $A_n = y \cdot \frac{(1,004149)^{360} - 1}{0,004149}$

Rentetilskrivning i yderligere 120 terminer: $\text{Opsparing} = y \cdot \frac{1,004149^{360} - 1}{0,004149} \cdot 1,004149^{120}$

Saldoen skal være 2.000.000, så vi har nu ligningen

$$2000000 = y \cdot \frac{1,004149^{360} - 1}{0,004149} \cdot 1,004149^{120}$$
$$2000000 = y \cdot 1362,4975$$
$$y = 1467,89$$

Så ydelsen skal være 1467,89 kr. pr. måned.

b) Hvis renten tilskrives kvartalsvis efter formlen for antal rentedage (dvs. med brug af formlen $\frac{b}{T} \cdot r$) får vi et lidt andet regnestykke.

I hvert kvartal indsættes:
y kr. der trækker renter i en hel termin,
y kr. der trækker renter i to tredjedele termin,
y kr. der trækker renter i én tredjedel termin.

Renten pr. kvartal er 1,25 %, så udregningen er
$y \cdot (1+0,0125) + y \cdot (1+\frac{2}{3} \cdot 0,0125) + (1+\frac{1}{3} \cdot 0,0125) = 3,0250 \cdot y$.

Opsparingen foregår over 120 kvartaler, så værdien af opsparingen er:

$$A_n = 3,025 \cdot y \cdot \frac{(1,0125)^{120} - 1}{0,0125}$$

Disse penge skal yderligere trække rente i 10 år, dvs. i 40 kvartaler

$$\text{Opsparing} = 3,025 \cdot y \cdot \frac{(1,0125)^{120} - 1}{0,0125} \cdot 1,0125^{40} = 1368,3651 \cdot y.$$

På denne måde får vi, at den månedlige ydelse skal være:

$$\frac{2000000}{1368,3651} = 1446,60 \text{ kr.}$$

Øvelse 15

1) $80.000 \cdot 1,06^{10} = 143.267,82$

2) $10.869,44 \cdot \frac{1,06^{10} - 1}{0,06} = 143.267,86$

3) De to beløb modsvarer hinanden – de to ordninger giver nøjagtig samme værdi af pengene om 10 år.

Øvelse 16

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

Som ved opsparingsannuiteten, er det ikke muligt at beregne en ukendt rentefod uden at benytte regneark eller tabeller. Vi viser her, hvorledes man kan bestemme antal terminer og ydelsen, hvis de er ukendte.

1) Ydelsen ukendt.

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$G \cdot r = y \cdot (1-(1+r)^{-n})$$

$$\frac{G \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} = y$$

2) Antal terminer ukendt

$$G = y \cdot \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

$$\frac{G \cdot r}{y} = 1-(1+r)^{-n} \quad \text{isolér } (1+r)^{-n}$$

$$(1+r)^{-n} = 1-\frac{G \cdot r}{y} \quad \text{tag logaritmen på begge sider}$$

$$-n \cdot \log(1+r) = \log\left(1-\frac{G \cdot r}{y}\right) \quad \text{få } n \text{ til at stå alene}$$

$$n = -\log\left(1-\frac{G \cdot r}{y}\right) \Big/ \log(1+r)$$

Kapitel 14 Vækstfunktioner

Øvelse 3

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Vi beregner $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ for at se, om vi kan bestemme en konstant fremskrivningsfaktor.

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{b \cdot a^{x+1}}{b \cdot a^x} = \frac{a^{x+1}}{a^x} = a^{x+1-1} = a^1 = a$$

Øvelse 4

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(t)$	6,82	7,76	9,66	12,12	14,31	17,96	21,8	26,26	32,87	40,36
$\frac{f(t+1)}{f(t)}$	1,14	1,24	1,25	1,18	1,26	1,21	1,20	1,25	1,23	

Fremskrivningsfaktorerne $\frac{f(t+1)}{f(t)}$ er nogenlunde konstante. Med tre betydende giver de i gennemsnit 1,22. Så et godt bud er, at væksten i gennemsnit er på 22 % pr. periode. En fortsat vækst på 22 % pr. periode giver, at $f(20) = 40{,}36 \cdot 1{,}22^{10} \approx 295$.

Øvelse 6

Funktionen er $f(x) = b \cdot a^x$, og vi indsætter de to kendte punkter.

$$y_1 = b \cdot a^{x_1}$$
$$y_2 = b \cdot a^{x_2}$$

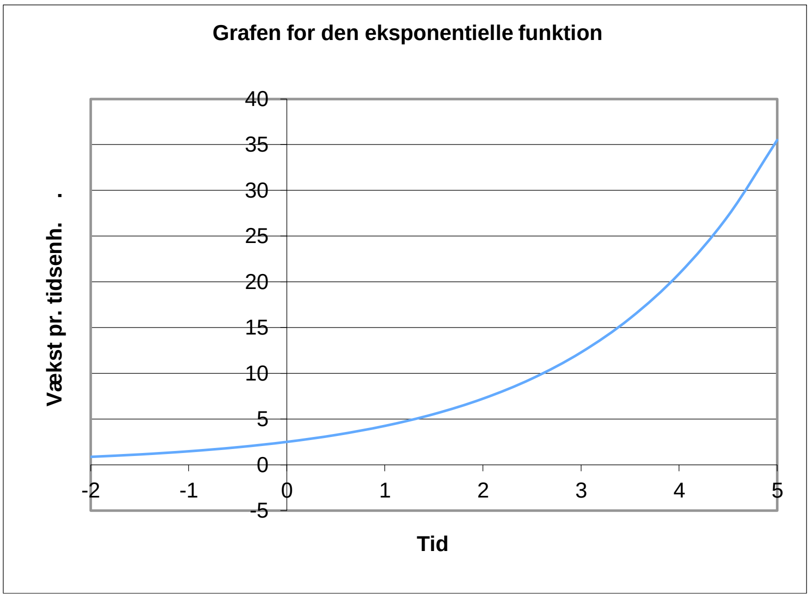
Hvis vi danner forholdet mellem de to ligninger, kan vi dividere *b*'erne væk – det giver håb om at kunne bestemme *a*.

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{b \cdot a^{x_1}}{b \cdot a^{x_2}} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

Vi har altså $a^{x_1 - x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ og kan derfor beregne $a = \sqrt[x_1 - x_2]{\frac{y_1}{y_2}}$

b bestemmes derefter ud fra en af de oprindelige ligninger: $y_1 = b \cdot a^{x_1} \Rightarrow b = \frac{y_1}{a^{x_1}}$

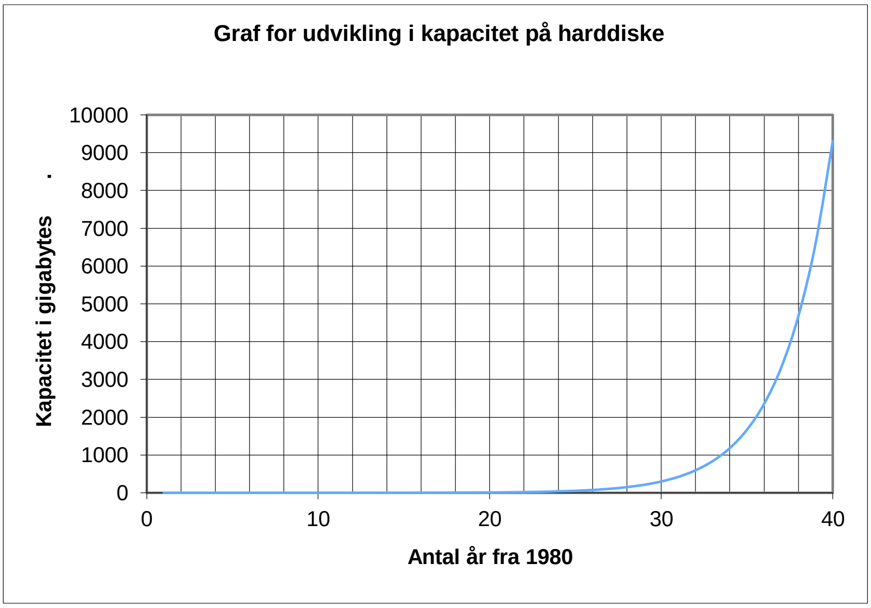
Øvelse 7



Relativ vækst pr. tidsenhed er det samme som procentvis vækst.
Vi har a = 1,7 dvs. den procentvise vækst er lig 70%, og vækstfaktoren er 1,7.

Den procentvise vækst medregner kun den faktiske vækst, men vækstfaktoren, som også kaldes fremskrivningsfaktoren, indeholder de 100%, vi allerede har og derfor i tilfælde af positiv vækst ofte har formen 1,…, hvor tallet 1 står for det, vi allerede har. Fx ses ofte vækstfaktoren 1,05 for, hvor meget en sum vokser til, når den tilskrives 5% i renter pr. tidsenhed. Her står 1 for den sum, der får renter tilskrevet.

Øvelse 9



Vi har, at $y = 0,01 \cdot 1,41^x$, hvor *x* er antallet af år siden 1980, og *y* er kapaciteten i gigabytes.

Prognose: I år 2020 (1980 + 40) vil kapaciteten ved denne fremskrivning være på:
$y = 0,01 \cdot 1,41^{40} \approx 9.306$ gigabytes.

Øvelse 13
Vi har, at $y = 1480 \cdot 10^{-0,00436x}$, hvor *x* står for dage. Vi skal bestemme halveringstiden.

For *x* = 0 har vi, at $y = 1480 \cdot 10^{-0,00436 \cdot 0} = 1480$.

Kaldes halveringstiden for *x* er kravet, at aktiviteten til tiden *x* skal være det halve af 1480, altså 740:

$1480 \cdot 10^{-0,00436x} = 740$ som ved division med 1480 på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$10^{-0,00436x} = \frac{1}{2}$ der ved at tage logaritmefunktionen på begge sider af lighedstegnet er ensbetydende med

$\log\left(10^{-0,00436x}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right)$ ved anvendelse af regneregler for logaritmer er dette ensbetydende med

$-0,00436x \cdot \log 10 = \log 1 - \log 2$ der ved opslag af log 2 er ensbetydende med

$-0,00436x \cdot 1 = 0 - 0,3010$ der ved anvendelse af almindelige regneregler er ensbetydende med

$x = \frac{-0,3010}{-0,00436} \approx 69,037$ Halveringstiden er ca. 69 dage

Herefter skal vi finde, hvor lang tid det tager, før end aktiviteten er faldet til 1. Vi opstiller ligningen:

$1480 \cdot 10^{-0,00436x} = 1$ og løser den på samme måde som ovenfor.

Løsning: $x \approx 727,12$ Altså tager det ca. 727 dage eller 2 år at nå et sikkert niveau.

Øvelse 15

1) Arealet x af et kvadrat er kvadratet på siden, altså $s^2 = x$. Uddrages kvadratroden på hver side (eller opløftes til $\frac{1}{2}$) fås $s = x^{\frac{1}{2}}$, hvilket er en potensfunktion (b=1 og a=$\frac{1}{2}$).

2) Rumfanget x er lig med sidelængden i tredje potens. Ved at uddrage den tredje rod på hver side fås på lignende vis som under 1), at sidelængden er rumfanget opløftet til en tredjedel, hvilket er en potensfunktio: $x = l^3 \Leftrightarrow l^3 = x \Leftrightarrow l(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

3) Overfladen af en terning består af 6 sideflader hver med arealet x^2. Vi finder derfor: $o(x) = 6 \cdot x^2$, hvilket er en potensfunktion (b = 6 og a = 2).

4) Vendes formlen fra 3) omvendt fås $x = \left(\frac{o}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$, eller hvis vi respekterer, at det nu er overfladearealet, der skal være den variable x: $s = \left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Dette indsættes i rumfangsformlen $R = s^3$, hvorefter vi finder $r(x) = \left[\left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Dette udtryk har ikke umiddelbart form som en potensfunktion, men bliver det, hvis vi sætter konstanten ud for foran ved at opløfte tæller og nævner hver for sig til potensen $\frac{3}{2}$:

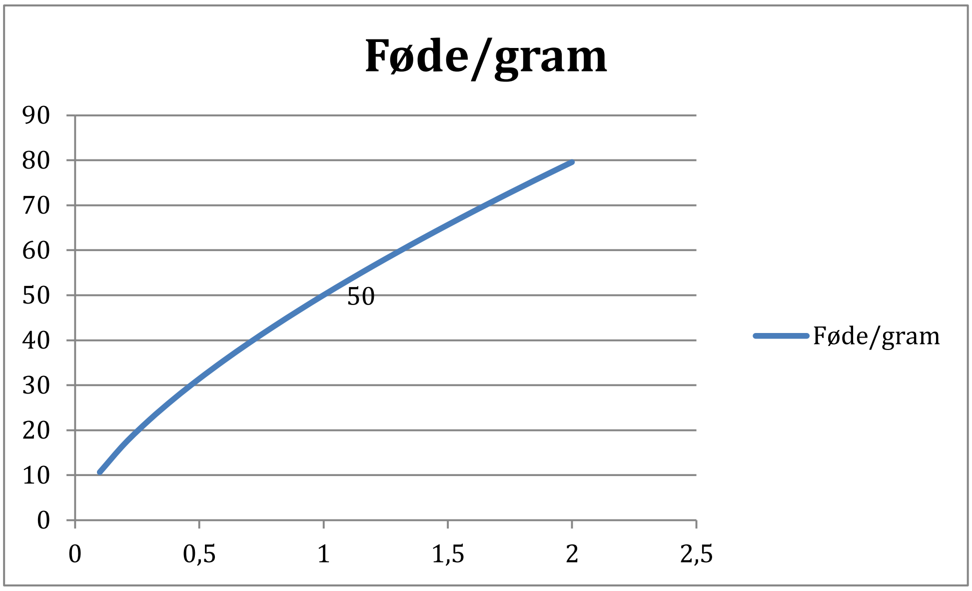
$$r(x) = \left(\frac{x}{6}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{6^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{1}{6^{\frac{3}{2}}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 6^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 3{,}3019 \cdot x^{\frac{3}{2}},$$

hvilket er en potensfunktion med b= 3,3019 og a = $\frac{3}{2}$.

Øvelse 18

Vi kan kun skitsere funktionen, hvis vi ved hvad fødeindtaget er ved en given vægt. Lad os sige at det er på 50 gram for en ørred på 1 kg. Så bliver funktionen $y = 50 \cdot x^{0,67}$, hvis graf ser således ud.

Vægt/kilo	Føde/gram
0,1	11
0,2	17
0,3	22
0,4	27
0,5	31
0,6	36
0,7	39
0,8	43
0,9	47
1	50
1,1	53
1,2	56
1,3	60
1,4	63
1,5	66
1,6	69
1,7	71
1,8	74
1,9	77
2	80



2) En dobbelt så stor fisk indtager $2^{0,67} = 1,59$ gange så meget som den mindre eller 59% mere. Dette er ganske uafhængigt af vores gæt på fødeindtag på 50 gram for en fisk på 1 kg, og det er også uafhængigt af den mindre fisks vægt, fordi $\frac{(2x)^{0,67}}{x^{0,67}} = \frac{2^{0,67} \cdot x^{0,67}}{x^{0,67}} = 2^{0,67} = 1,59$.

3) Nu ønsker vi, at regnestykket skal ende på 2,00 i stedet for 1,59. Til gengæld er vægten ganget med en anden faktor *f*, så vi får i lighed med 2):

$\frac{(fx)^{0,67}}{x^{0,67}} = \frac{f^{0,67} \cdot x^{0,67}}{x^{0,67}} = f^{0,67} = 2$, hvor det centrale bliver ligningen $f^{0,67} = 2$.

I skolen bliver man nødt til at prøve sig frem på lommeregneren eller regneark, fx giver $3^{0,67} = 2,0877$, så man ser, at svaret er tæt på 3. Men kender man lidt mere til potensopløftning ved man, at man kan opløfte til $\frac{1}{0,67}$ på hver side og få $f = 2^{1/0,67} = 2,81$. Så svaret bliver, at en 2,81 gange så stor en fisk optager dobbelt så meget føde på en dag som den mindre fisk.

4) Vi så i øvelse 15, at længden $l(x)$ af en terning som funktion af rumfanget x var $l(x) = x^{\frac{1}{3}}$. Tænker vi os en model af en fisk bygget af centicubes, indser vi, at også en fisks lineære mål med en vis ret kan siges at vokse proportionalt med $x^{\frac{1}{3}}$. Da endvidere vægt og rumfang af en fisk må antages at være proportionale (faktisk næsten 1, da fisk har en vægtfylde tæt på 1), kan vi antage, at fiskens lineære mål er proportionale med $x^{\frac{1}{3}}$, hvor x er fiskens vægt. Da mundens areal voksen med de lineære mål i anden potens (tænk igen på at måle mundens tværsnitsareal med små kvadrater (millimeterpapir), er det ikke urimeligt at antage, at fødeindtaget vokser proportionalt med

$$(x^{\frac{1}{3}})^2 = x^{\frac{2}{3}}$$

Bemærk, at hele argumentationsformen her er meget anderledes end i de tidligere opgaver, idet der her er tale om anvendt matematik eller mere præcist 'modellering'. Vi prøver, så godt vi kan at opstille en model af en ørreds opførsel/fødeindtag, som vi kan forestille os, det udvikler sig som funktion af ørredens vægt. Det er mere en opgave for en biolog end for en matematiker, fordi man skal vide noget om virkelighedsområdet, man modellerer. Det forbavsende er imidlertid, at vores meget matematiske idealiserede tilgang til problemet faktisk giver den løsning, som biologer og dambrugere bruger i deres hverdag.

Øvelse 20

I GeoGebra kan løsningerne findes ved at tegne de vandrette linjer y = 19 hhv. y = 7 og bestemme skæringspunkter med funktionerne.

Vi viser også, hvordan en af ligningerne kan løses analytisk.

$$3 \cdot 4^x = 19$$

$$4^x = \frac{19}{3}$$

$$x \log(4) = \log(\tfrac{19}{3})$$

$$x = \frac{\log(\frac{19}{3})}{\log(4)} \approx 1,3315$$

Øvelse 21

Årstal	Befolkning i mio.	Fremskrivning
1790	3,929	
1800	5,308	1,351
1810	7,24	1,364
1820	9,638	1,331
1830	12,866	1,335
1840	17,069	1,327

Hvis vi antager, at fremskrivningen er konstant (og lig 1,33) fra tiår til tiår, svarende til en tilvækst på 33 % i befolkningen hvert tiende år, kan vi fremskrive modellen til disse tal ved at gange med 1,33 for hver gang, vi vil se 10 år frem:

1840	17,069
1850	22,702
1860	30,193
1870	40,157
1880	53,409
1890	71,034
1900	94,475
1910	125,652
1920	167,117
1930	222,266
1940	295,614

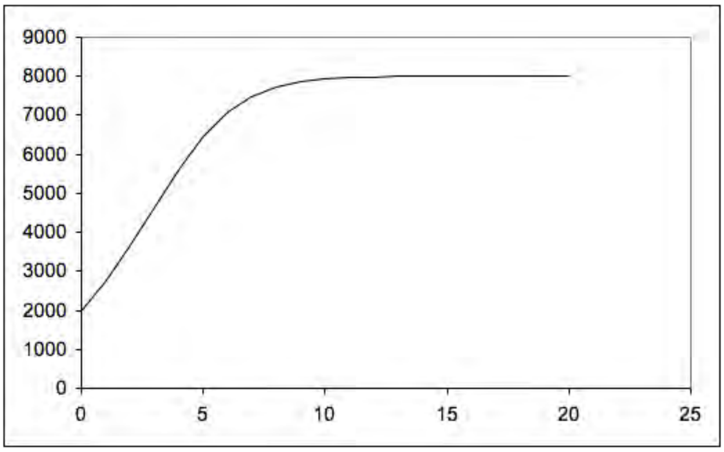
På basis af modellen ville vi forvente lige godt 295 millioner mennesker i USA i 1940.

Øvelse 22

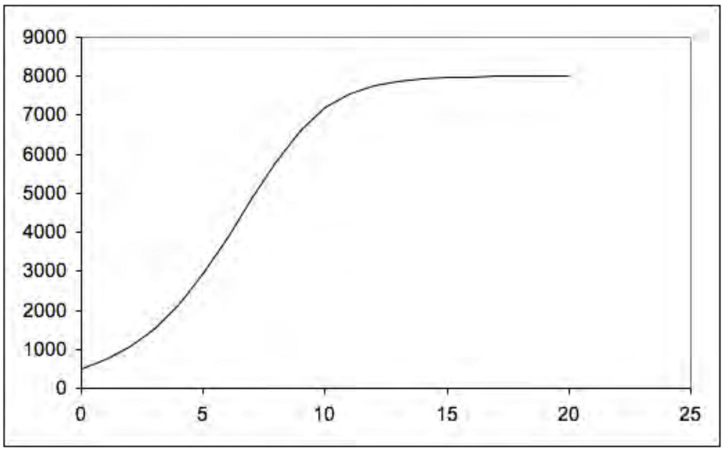
Fremskrivningsfaktor = 1 + vækstrate

Øvelse 23

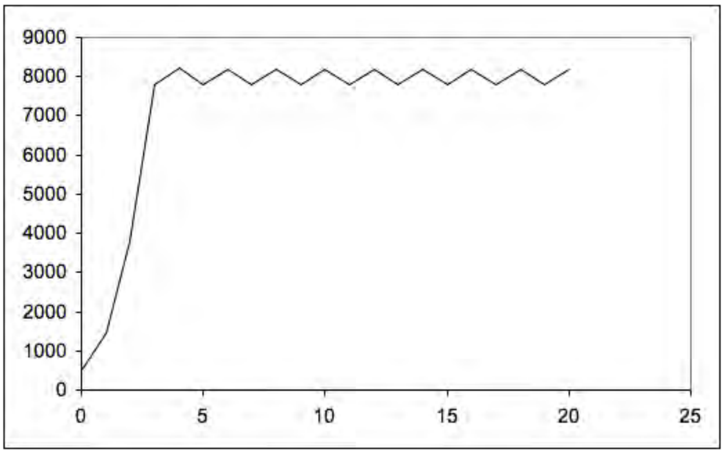
Vækstfaktoren er 0,5. Med maksimum på 8.000 får vi følgende billede – bakteriepopulationen vokser atter mod maksimum.



Med en lavere startværdi (500) og maksimum på 8.000 får vi:



som ligner den forrige graf meget, udviklingen er bare lidt længere tid om at komme i gang.
Hvis vi prøver med en vækstfaktor på 2, får vi følgende billede:



hvor populationen nogen gange kommer over 8.000 for derefter at falde til under maksimumgrænsen igen.

Regnearket, som vi udregner disse kurver med, er struktureret således:

	A	B	C
1	Opg. 13 Logistisk fremskrivning		
2			
3	Start, b(0)=		2000
4	Maksimum =		10 000
5	maksimal formering, a =		2
6			
7	Tidspunkt	Population	
8	0	2000	
9	1	5200	
10	2	10 192	
11	3	9801	
12	4	10 191	

I cellen B8 står der = C3, og i cellen B9 står der =B8+$C$5*($C$4-B8)/$C$4*B8.
Da der er lavet absolutte referencer de rigtige steder i denne formel, så kan den bare trækkes nedad, når resten af cellerne i B-kolonnen skal udfyldes.

Øvelse 24

Brug regnearket fra forrige øvelse

Kapitel 15 Modellering i skolen

Ingen løsningsforslag