Løsningsforslag til Tal, algebra og funktioner 1.-6. klasse

Bemærk, at vi benytter betegnelsen øvelser som en meget bred betegnelse. Derfor er der også nogle af vores øvelser, der nærmer sig kategorien 'undersøgelser', dem giver vi som oftest ikke løsningsforslag til, ligesom svar til kategorien 'overvej-diskuter' ikke giver megen mening.

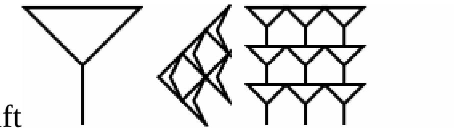
Kapitel 1 Børns talbegreber og regneoperationer i de første skoleår

Øvelse 1

Forslag til svar fremgår af teksten på de næste par sider i lærebogen.

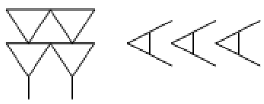
Kapitel 2 Tallenes historiske udvikling

Øvelse 1

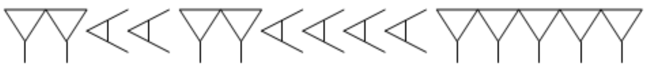
119 skrives sådan i kileskrift 

Øvelse 2

Idet vi benytter friheden i fortolkningen af positionerne til at læse de første fire tegn som tallet 4, hvorefter de næste tre står ‘efter kommaet’ og dermed angiver $\frac{30}{60}$, skrives $4\frac{1}{2}$ som:



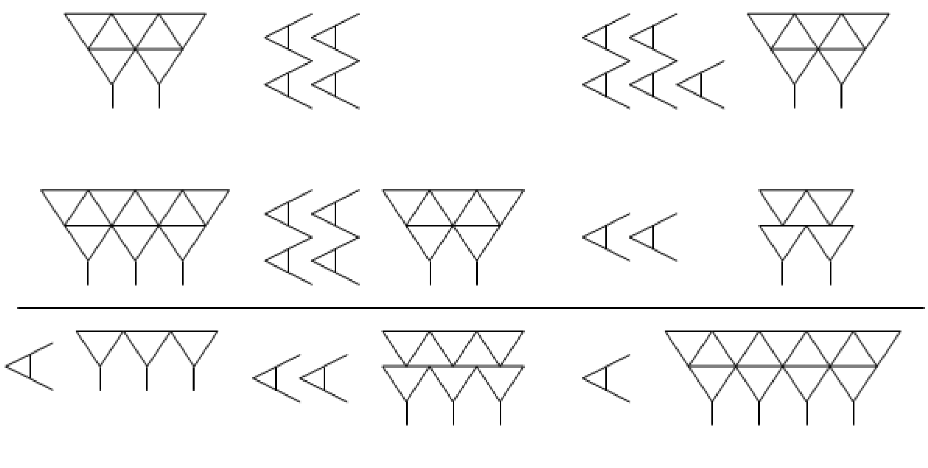
142 skrives med de første seks tegn, og $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ skrives med de sidste ni tegn, dvs. $142\frac{3}{4}$ skrives som:



Man kan ikke se på dette tal, at det er ca. 140. Det kunne godt tolkes som et tal, der var 60 gange større og for den sags skyld 60 gange mindre osv.

Øvelse 3

5 timer 40 minutter og 55 sekunder kan skrives som den øverste række, 7 timer 45 minutter og 24 sekunder som rækken under. Herefter er additionen ikke vanskelig, resultatet bliver som rækken under stregen: 13 timer 26 minutter og 19 sekunder.



Øvelse 5

1) $8 \cdot 17$
$4 \cdot 34$
$2 \cdot 68$
$1 \cdot 136$

Svar: $8 \cdot 17 = 136$.

2) \37 · 51
18 · 102
\9 · 204
4 · 408
2 · 816
1 · 1632

Svar: $37 \cdot 51 = 51 + 204 + 1632 = 1887$.

Øvelse 6

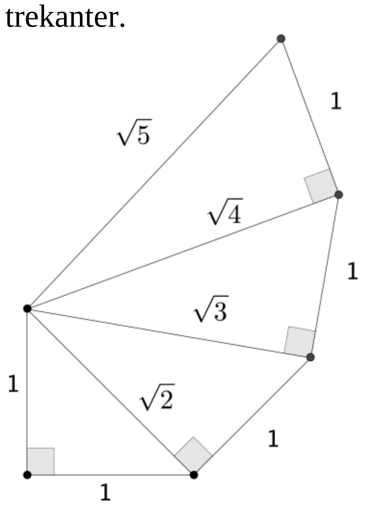
Arealet af en cirkel med diameter 9 bliver
$\left(\frac{8}{9} \cdot 9\right)^2 = 64$

Med moderne matematik får man $\pi \cdot 4{,}5^2 = 63{,}61$.

Omskriver man babylonernes formel får man $\left(\frac{8}{9} \cdot d\right)^2 = \left(\frac{8}{9} \cdot 2 \cdot r\right)^2 = \left(\frac{16}{9} \cdot r\right)^2 = \frac{256}{81} \cdot r^2$, og da $\frac{256}{81} \approx 3{,}16$ kan man hævde, at de benyttede ca. 3,16 som værdi for π.

Øvelse 9

Her er en idé til, hvad man kan gøre, idet man starter med trekanten med kateterne 1 og 1, hvorefter de forskellige kvadratrødder successivt optræder som hypotenuser i de nytilkomne retvinklede trekanter.



Kapitel 3 Læremidler fra regnebog til CAS

Øvelse 2

fx 34 · 676 =33 · 676 + 676 =____
og 43 · 676 =33 · 676 + 10 · 676 =____
Eleven får bl.a. styrket sin opmærksomhed på positionens rolle.
Lidt anderledes med 44 · 444, der fx kan udregnes som 4 ·11 · 111 · 4 =16 · 11 · 111=_____

Øvelse 6

45 · 67 = 3.015 (4 cifre)
Som overslag kan man sige: 50 · 50 = 5 · 5 · 100 = 2.500, dvs. ved brug af lommeregner skal man forvente omkring fire cifre.

På den anden side kan to tocifrede tal godt resultere i et trecifret tal som ved 10 ·10 =100, og i den anden ende giver 99 · 99 = 9801, så antallet af cifre synes ikke at kunne overstige 4.

13 · 876 = 11.388 (5 cifre)
Overslag: 10 · 1.000 = 1 · 1 · 10.000 = 10.000, dvs. man forventer cirka fem cifre. Ser vi på ekstremerne for et tocifret tal gange et trecifret, får vi på den ene side 10 · 100 = 1000, altså et firecifret tal. Går vi til den anden ekstrem, finder vi 99 · 999 = 98901, altså 5 cifre. Hermed har vi faktisk bevist, at et tocifret gange et trecifret tal giver et resultat med enten fire eller fem cifre.

341 · 2.287 = 779.867 (6 cifre)
Overslag: 400 · 2.000 = 4 · 2 · 100.000 = 800.000, dvs. forvente cirka seks cifre.
Men kan et trecifret gange et firecifret tal give 7 cifret resultat? Vi prøver med 999 · 9999 = 9.989.001, så 7 cifre er muligt.

4.472 · 1.946 = 8.702.512 (7 cifre)
Fortsæt selv undersøgelsen. Her har vi to 4-cifrede tal, som ganget samme giver et 7-cifret tal og ikke 4 + 4 = 8 cifre. Men giver det altid enten 7 eller 8, når man har sådan to 4-cifrede tal?

100 · 869 = 86.900 (5 cifre)
Overslag: 100 · 900 = 1 · 9 · 10.000 = 90.000, dvs. forvente cirka fem cifre.

12 · 8 = 96 (2 cifre)
Overslag: 10 · 10 = 1 · 1 · 100 = 100, her ville man så forvente cirka tre cifre, men forhåbentlig godtage et resultat på 96. Ekstremerne er 10 · 1 = 10 og 99 · 9 = 891.

Hvad mon vi kan sige, når et n-cifret tal ganges med et m-cifret tal? Vi kan åbenbart ikke være sikre på, at produktet har $n + m$ cifre. Kan det have $n + m + 1$, $n + m – 1$? Kan vi overbevise os selv om, at den enten giver $n + m$ eller $n + m – 1$ cifre? Hvis vi går tilbage til eksemplerne, er der så tilfælde, hvor vi sikkert kan afgøre, om vi rammer $n + m$, og tilfælde hvor det klart er $n + m – 1$?

Generelt svar på opgaven: Et n-cifret tal ganget med et m-cifret tal giver et resultat med enten $n + m$ eller $n + m – 1$ cifre.

Bevis
10^n er det mindste tal med n + 1 cifre. Så hvis t_n er et n-cifret tal, og t_m er et m-cifret tal, så gælder $10^{n-1} \leq t_n < 10^n$ og $10^{m-1} \leq t_m < 10^m$, og dermed $10^{n+m-2} \leq t_n \cdot t_m < 10^{n+m}$, hvoraf aflæses at $t_n \cdot t_m$ har mindst n + m – 1 cifre og højst n + m cifre.

Kapitel 4 Genoplev kampen med at forstå positionssystemet

Bemærk, at vi benytter betegnelsen øvelser som en meget bred betegnelse. Derfor er der også nogle af vores øvelser, der nærmer sig kategorien ‘undersøgelser’, dem giver vi som oftest ikke løsningsforslag til, ligesom svar til kategorien ‘overvej-diskuter’ ikke giver megen mening.

Øvelse 2

a = 111101

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	1	0	1
$1\cdot 2^5$	$1\cdot 2^4$	$1\cdot 2^3$	$1\cdot 2^2$	$0\cdot 2^1$	$1\cdot 2^0$

$1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 61$

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
+ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle \cancel{10}} & {\scriptstyle 10} & {\scriptstyle 10} & & {\scriptstyle 10} \\
 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 & \cancel{1} & 0 \\
- & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
 & & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Øvelse 3

$41322_V = 4\cdot 5^4 + 1\cdot 5^3 + 3\cdot 5^2 + 2\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0 = 2712_X$.

9823_X omskrevet til base V.

5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
3125	625	125	25	5	1
3	0	3	2	4	3
Rest 9823 – 3 · 3125= 448	Rest 448	Rest 448 – 3 · 125 = 73	Rest 73 – 2 · 50 = 23	Rest 23 – 4 · 5 = 3	Rest 0

$9823_X = 303243_V$.

$6512_{VII} = 2312_X$.

$6512_{VII} = 100100001000_{II}$.

Øvelse 4

1) $2EF_{XVI} = 751_{X}$.

2) $ABE_{XVI} + BAD_{XVI} = 166B_{XVI}$. og da $166B_{XVI} - FED_{XVI} = 67E_{XVI} > 0$ er udsagnet korrekt.

Øvelse 5

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Øvelse 6

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & \\
 & & \cancel{4} & 3 & 2 & 4 \\
+ & & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 & & {\scriptstyle 10} & \\
 & \cancel{2} & 2 & 4 \\
- & 1 & 4 & 3 \\
\hline
 & & 3 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & \cancel{4} & 3 & 2 & 4 \\
- & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Øvelse 7

$21_{V} \cdot 13_{V} = 323_{V}$.

$24_{V} \cdot 43_{V}$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & {\scriptstyle 3} & & & \\
 & & {\scriptstyle 2} & & & \\
 & & 2 & 4 & \cdot & 4 \quad 3 \\
\hline
 & 1 & 3 & 2 & & \\
2 & 1 & 1 & 0 & & \\
\hline
2 & 2 & 4 & 2 & &
\end{array}$$

$32_{V} \cdot 33_{V} = 2211_{V}$.

Øvelse 8

·	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

Øvelse 9

			2	3					
			1	2					
		1	3	2	4	·	1	4	3
	1	2	0	3	2				
	2	4	1	1	0				
	3	2	4	0	0				
1	1	4	0	4	2				

Øvelse 11

1	1	0	2	:	4	=	1	2	3
	4								
	2	0							
	1	3							
		2	2						
		2	2						
			0						

2	3	2	1	:	1	2	=	1	4	3
1	2									
1	1	2								
1	0	3								
		4	1							
		4	1							
			0							

Øvelse 12

Som man kan se i to-tabellen i base V er lige tal repræsenteret både med ulige og lige slutciffer. Det er derfor ikke nemt at afgøre om 2 går op i et tal opskrevet i base V.

$5_X = 10_V$, og det er derfor nemt at afgøre, om det går op i et tal skrevet i base V. det sker netop, når tallet slutter på 0.

Kapitel 5 Elevers opfattelse af og regning med flercifrede tal

I øvelse 1 er svaret hele tiden er “81 divideret med 6”, altså 13, 13½ eller 14, men fortolkningen af resten afhænger meget af den konkrete situation.

Der er ikke flere løsningsforslag, da aktiviteterne i dette kapitel er af formen Overvej/diskuter.

Kapitel 6 De positive rationale tal

Øvelse 7

$\frac{a}{b}$ består af *a* stykker af længde én *b*'endedel. $\frac{c}{b}$ består af *c* stykker af længden én *b*'endedel.
$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}$ består derfor af *a* + *c* stykker af længden én *b*'endedel, hvilket også kan skrives som $\frac{a+c}{b}$.

Øvelse 9

6) Vi har, at $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, og vi skal vise, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$.

Vi ser først på $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$, der ifølge øvelse 4.5 er ensbetydende med ($\Leftrightarrow$)

$a(b+d) \le b(a+c)$, vi ganger ind i en parentes

$\Leftrightarrow ab+ad \le ba+bc$, vi subtraherer *ab* = *ba* på begge sider af lighedstegnet

$\Leftrightarrow ad \le bc$ ifølge 5)

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$.

Det sidste var givet at være sandt, så derfor er også det ensbetydende udsagn $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d}$ sandt.

Tilsvarende for $\frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$, hvorefter vi har vist, at $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$ er et sandt udsagn og kan konkludere, at hvis man adderer brøker af forskellig størrelse ved at addere tæller med tæller og nævner med nævner, så får man et resultat, der ligger mellem de to brøker, der skulle adderes.
Vi interesserer os i dette kapitel kun for positive brøker. Læseren kan ved en senere lejlighed overveje, om det vi her har vist også gælder, hvis vi tillader negative brøker, som man jo gør i skolen og i samfundet.

7) Vi finder tre brøker, der ligger mellem $\frac{1}{7}$ og $\frac{1}{8}$:

Vi finder en tilstrækkelig stor fællesnævner, således at der ligger tre brøker med den samme fællesnævner mellem de to givne brøker:

$\frac{1\cdot 32}{7\cdot 32}=\frac{32}{224}$ og $\frac{1\cdot 28}{8\cdot 28}=\frac{28}{224}$, og de tre brøker bliver: $\frac{29}{224}$, $\frac{30}{224}$ og $\frac{31}{224}$.

Men vi kunne også have udnyttet vores fund i 6) ovenfor, for den metode fortæller os, at $\frac{1}{8}<\frac{1+1}{8+7}<\frac{1}{7}$, således at vi har fundet en brøk $\frac{2}{15}$ med den ønskede egenskab. Derefter kan vi bruge samme metode igen til at finde en brøk mellem $\frac{1}{8}$ og $\frac{2}{15}$ osv.

Øvelse 16

$$\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4}{6}+\frac{5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4+5}{6}\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{9}{6}=\frac{9}{8}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{12}{30}-\frac{5}{30}\right)=\left(\frac{2+3}{4}\right)\cdot\left(\frac{12-5}{30}\right)=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{30}=\frac{7}{24}$$

Øvelse 17

Da måling er en form for division bliver svaret cirka 25 divideret med $\frac{3}{4}$. Ganges i stedet med den omvendte brøk får svaret $\frac{100}{3}$ eller 33 flasker og en tredjedel flaske, hvilket lige akkurat giver os den ønskede smagsprøve.

Øvelse 20

$$\frac{\frac{4}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}-\frac{2}{3}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{\frac{12}{15}+\frac{10}{15}}{\frac{12}{15}-\frac{10}{15}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{\frac{22}{15}}{\frac{2}{15}}\cdot\frac{2}{22}=\frac{22}{2}\cdot\frac{2}{22}=1$$

Øvelse 23

Gruppe 1 1500 promille; 1,5; $1\frac{1}{2}$; 1,500; $\frac{6}{4}$; $\frac{84}{56}$; $\frac{12}{8}$; $1\frac{3}{6}$; $6:4$

Gruppe 2 0,75; 750.000 ppm; tre fjerdedele; 750 promille; $\frac{3}{4}$; $\frac{351}{468}$; $\frac{21}{28}$; 75 %; $3:4$

Undersøgelse 1 De omtalte beviser følger her

Sætning 2

Den uforkortelige brøk $\frac{t}{n}$ kan skrives som et endeligt decimaltal i netop de tilfælde, hvor n's primfaktoropløsning kun indeholder 2 og 5.

Bevis

1) Først viser vi: Hvis $\frac{t}{n}$ er et endelig decimaltal, så indeholder n's primfaktoropløsning kun 2 og 5.

Et endeligt decimaltal bliver til et naturligt tal, hvis den ganges med en passende 10'erpotens.

Hvis derfor $\frac{t}{n}$ kan skrives som et endeligt decimaltal, så er $\frac{T \cdot t}{n}$ et naturligt tal, hvor T betegner en passende tierpotens.

n går med andre ord op i $(T \cdot t)$. Det betyder, at hele n's primfaktoropløsning forekommer i $(T \cdot t)$.

Men da $\frac{t}{n}$ var uforkortelig, har t og n ingen fælles primfaktorer. Derfor må alle n's primfaktorer forekomme i T.

Men de eneste primfaktorer, der forekommer i en tierpotens, er 2 og 5. Altså indeholder n's primfaktoropløsning udelukkende primfaktorerne 2 og 5.

2) Dernæst viser vi: Hvis n's primfaktoropløsning kun indeholder 2 og 5, kan $\frac{t}{n}$ skrives som et endeligt decimaltal.

Antag, at $n = 2^a \cdot 5^b$ for naturlige tal a og b.

Vi vil først vise, at brøken kan forlænges, så den får en tierpotens i nævneren.

Men det er klart, at man ved at gange med en toerpotens eller en femmerpotens bringer n op på en tierpotens.

Hvis fx b er større end a, så vil vi gange n med 2^{b-a}, hvilket giver $2^{b-a} \cdot n = 2^a \cdot 5^b \cdot 2^{(b-a)} = 2^b \cdot 5^b = 10^b$.

Vi har altså vist, at vi kan forlænge $\frac{t}{n}$ med et tal (i tilfældet ovenfor med 2^{b-a}), så brøken får en tierpotens i nævneren. Men en brøk med tierpotens er pr. definition en decimalbrøk og kan nemt skrives i den
sædvanlige notation som et endeligt decimaltal med et komma.

Sætning 3

Enhver uforkortelig brøk $\frac{t}{n}$, hvor n indeholder andre primfaktorer end 2 og 5 har en uendelig periodisk decimaltalsfremstilling, og periodelængden er mindre end n.

Bevis

Vi forestiller os, at vi bestemmer decimaltalsfremstillingen for et sådant $\frac{t}{n}$ ved en divisionsalgoritme. Vi ved fra sætning 2, at divisionen aldrig går op. Så ved hver deldivison i den lange division får vi en kvotient, og der vil optræde en rest forskellig fra 0.

Når man dividerer med n, kan der imidlertid kun optræde n – 1 forskellige sådanne rester, nemlig 1, 2, 3, …, n – 1. Hvis der optrådte en rest større end n, ville vi straks kunne lade n gå op en gang mere.

Derfor vil der undervejs i den lange division på et tidspunkt, senest efter n – 1 divisioner, optræde en rest, som man allerede har haft.

Og lige så snart en sådan tidligere rest optræder igen, gentager divisionsmønsteret sig akkurat som første gang, det optrådte, og det vil igen optræde for tredje gang osv.

Resterne vil begynde at optræde i et periodisk mønster, og tilsvarende vil kvotienterne selvfølgelig (cifrene i decimaltalsfremstillingen) optræde i perioder.

Eksempel

Beviset for sætning 3 kan illustreres ved følgende eksempler, hvor vi udregner $\frac{1}{13}$ og $\frac{11}{13}$. Fed skrift angiver rest. Bemærk, at henholdsvis 1 og 11 dukker op som rest igen til sidst, hvilket er kernen i beviset ovenfor.

Eksempel 1 : 13

1 : 1 3 = 0,0 7 6 9 2 3

1						
0						
1	0					
0	0					
1	**0**	0				
	9	1				
		9	0			
		7	8			
		1	**2**	0		
		1	1	7		
				3	0	
				2	6	
					4	0
					3	9
						1

Eksempel 11 : 13

1 1 : 1 3 = 0,8 4 6 1 5 3

1	1						
	0						
1	**1**	0					
1	0	4					
		6	0				
		5	2				
			8	0			
			7	8			
				2	0		
				1	3		
					7	0	
					6	5	
						5	0
						3	9
						1	**1**

Øvelse 24

a) $\frac{80}{117}$ kan ikke skrives som et endeligt decimaltal.

Antag, at $\frac{80}{117}$ kan skrives som et endeligt decimaltal som fx 0,6837607, som er det svar, man får på en skolelommeregner. Antag altså, at $\frac{80}{117}$ = 0,6837607 gælder eksakt. Ved at gange på hver side af lighedstegnet med en passende tierpotens,(som i dette tilfælde skal være 10.000.000), kan vi opnå, at der står et helt tal på højresiden af udtrykket. I den konkrete situation $\frac{80\cdot 10.000.000}{117}$ = 6.837.607; hvis vi så ganger med 117 på hver side $80\cdot 10.000.000 = 6.837.607\cdot 117$.

Men dette kan ikke være muligt, for på højre side har vi 117 som indeholder fx primfaktoren 13. Ser vi nemlig på venstre side, så består 80 af primfaktorerne 2 og 5, og det samme gør enhver tierpotens og derfor specielt 10.000.000. Vi har altså udelukkende 2 og 5 i primfaktoropløsningen på venstre side, mens der står 13 og 3 og sikkert andre grimme ting gemt i det store tal 6.837.607 på højre side. De to sider kan derfor ikke være lig med hinanden. Den sætning, vi bygger på her, er sætningen om primfaktoropløsningens entydighed.

b) $\frac{117}{80}$ kan skrives som et endeligt decimaltal.

Ideen er at opløse 80 i de relevante faktorer:

$$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4\cdot 5}$$

Så forlænger vi brøken til højre, så vi får en tierpotens i nævneren. Det sker klart nemmest ved at forlænge med 5^3, hvorefter den vi kan fortsætte:

$\frac{117}{80} = \frac{117}{2^4\cdot 5} = \frac{117\cdot 5^3}{2^4\cdot 5\cdot 5^3} = \frac{117\cdot 5^3}{2^4\cdot 5^4} = \frac{117\cdot 5^3}{10^4} = \frac{14.625}{10.000} = 1,4625$ og $\frac{117}{80}$ er dermed omskrevet til et endeligt decimaltal .

Øvelse 25

1) $x = 0,\overline{123}$

$1000 \cdot x = 1000 \cdot 0,\overline{123}$

$1000x = 123,\overline{123}$

$1000x - x = 123,\overline{123} - 0,\overline{123}$

$999x = 123$

$x = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$

2) $q = 0,5\overline{536}$

$10 \cdot q = 10 \cdot 0,5\overline{536}$

$10q = 5,\overline{536}$

$1000 \cdot 10q = 1000 \cdot 5,\overline{536}$

$10.000q = 5.536,\overline{536}$

$10.000q - 10q = 5.536,\overline{536} - 5,\overline{536}$

$9.990q = 5.531$

$q = \frac{5.531}{9.990}$

Kapitel 7 Brøkregning i den fagdidaktiske skole, RME

Ingen løsningsforslag

Kapitel 8 Negative tal og repræsentationer

Ingen løsningsforslag

Kapitel 9 Talteori og matematisk tankegang

Øvelse 1

$91 = 13 \cdot 7$ så 7 går op i 91; kvotienten er 13.

Øvelse 3

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Listen af primtal under 100 er altså 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Øvelse 4

Det ene af tallene (p, $p + 1$) er lige. Det eneste lige primtal der findes er 2. Derfor kan der kun findes ét sæt primtalsnaboer, nemlig (2, 3).

Når p er ulige, vil der blandt tallene (p, $p + 2$, $p + 4$) altid være ét, der ligger i 3-tabellen, fordi det er åbenlyst, at et af de tre på hinanden følgende tal (p, $p + 1$, $p + 2$) må ramme 3-tabellen, og hvis det er $p + 1$, så vil $p + 4$ også gøre det. Da det eneste primtal i tretabellen er selve 3, kan der kun være det ene sæt primtalstrillinger (3, 5, 7).

[Da der ikke findes primtalstrillinger findes der heller ikke primtalfirlinger, men der findes nogle dobbelttvillinger af formen (p, $p + 2$, $p + 6$, $p + 8$). Hvis du selv prøver at finde sådanne vil du sikkert falde over de samme tal som dem på Ishango-knoglen, side 48 i lærebogen. Da disse er 20.000 år gamle kan dette sammenfald give anledning til mange og store tanker. For mere information googles på ”prime quadruplets”]

$f(n) = n^2 - n + 41$ ser ud til at give primtal, når man sætter forskellige n-værdier ind. Imidlertid er $f(41) = 41^2 - 41 + 41 = 41^2$ og dermed et sammensat tal.
Er der nogle af funktionsværdierne $f(n), n = 1, 2, ..., 40$, der ikke er primtal?

Øvelse 5

Det ser ud som om $\frac{x}{\pi(x)}$ stiger med ca. 2,3 hver gang. Derfor er det bedste bud, at $\frac{10^{13}}{\pi(10^{13})} = 28{,}9$ så $\pi(10^{13}) \approx 10^{13} : 28{,}9 \approx 346.020.761.246$. På hjemmesiden http://primes.utm.edu/howmany.shtml kan man finde det præcise antal 346.065.536.839.

Øvelse 6

sfd(330,77):

		Rest
330	77	22
77	22	11
22	11	0

sfd(330,77) = 11.

Øvelse 7

25 · (-2) + 17 · 3 = 1

Undersøgelse 1

1) 17x + 25y = 1

Da sfd(25,17) = 1 findes der ifølge sætning 3 løsninger til ligningen.

2) 15x + 25y = 6

Da sfd(25,15) = 5 findes der ifølge sætning 3 løsninger til ligningen 15a + 25b = 5. Hvis der også fandtes en løsning til 15x + 25y = 6, ville vi have 15(x – a) + 25(y – b) = 1. Men det ville betyde, at sfd(25,15) = 1 og er derfor en modstrid. Der findes derfor ingen løsninger til 15x + 25y = 6.

3) 42x + 33y = 6.

Da sfd(42,33) = 3 findes løsninger til ligningen 42a + 33b = 3.
x = 2a og y = 2b er derfor løsning til 42x + 33y = 6.

4) 65x + 91y = 6?

sdf(91,65) = 13 og derfor findes en løsning til 65a + 91b = 13. Hvis der også findes løsninger til 65x + 91y = 6, ville (a – 2x) og (b – 2y) opfylde 65(a – 2x) + 91(b – 2y) = 1, hvilket ville betyde, at sfd(91,65) = 1. Det er en modstrid, så der kan ikke være løsninger til 65x + 91y = 6.

5) $462x + 121y = 11$.

Denne ligning har en løsning da sfd(462,121) = 11.

6) $462x + 121y = 23$.

Denne ligning har ingen løsning. I kombination med løsningen til 5 ville det give en løsning til ligningen $462x + 121y = 1$, hvilket ville betyde, at sfd(462,121) er 1.

Øvelse 8

Hvis $p \mid a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n$ kan man, ved at sætte parenteser, tænke på det som om $p \mid a_1 \cdot (a_2 \cdot ... \cdot a_n)$. Fra sætningen ved vi nu, at $p \mid a_1$ eller $p \mid a_2 \cdot ... \cdot a_n$. Hvis $p \mid a_1$ har vi bevist at p går op i den ene af faktorerne. Hvis p ikke går op i a_1 ved vi $p \mid a_2 \cdot ... \cdot a_n$. Ved at sætte parenteser igen, kan vi så komme frem til, at $p \mid a_2$ eller $p \mid a_3 \cdot ... \cdot a_n$. Enten kan vi så konkludere $p \mid a_2$ eller vi kan sætte endnu en parentes...

Da der er et endelig antal faktorer, må argumentationen slutte på et tidspunkt, og vi kan konkludere at p går op i mindst en af faktorerne.

Øvelse 9

$18 = 2 \cdot 3^2$
$750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$
$143 = 11 \cdot 13$

Øvelse 10

1)$75 = 3 \cdot 5^2$ og $12 = 2^2 \cdot 3$. Derfor er de begge på formen $p \cdot q^2$ og har divisorerne1, p, q, $p \cdot q$, $p \cdot q^2$.

2) $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Divisorerne er derfor $2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0, 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0, ..., 2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1$
I alt er der 16 divisorer i tallet 210, nemlig tallene 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210.

3) $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ og $96 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ har alle 12 divisorer.

4) Tal med netop 2 divisorer er primtal.

5) Hvad kan du fx sige om tal med præcis tre divisorer?

Øvelse 11

1) Der er $3 \cdot 4 = 12$ divisorer.

2) De 8 divisorer er $p^0q^0r^0$, $p^1q^0r^0$, $p^0q^1r^0$, $p^0q^0r^1$, $p^1q^1r^0$, $p^1q^0r^1$, $p^0q^1r^1$ og $p^1q^1r^1$.

3) Divisorer i p^n er 1, p, p^2,..., p^{n-1}, p^n – dvs. i alt n + 1 divisorer.

4) Overlades til læseren.

5) Fra punkt 4 ved vi, at $p^x \cdot q^y \cdot ... \cdot r^z$ har $(x+1)(y+1)\cdot...\cdot(z+1)$ divisorer når p, q, ..., r er primtal.

$(x+1)(y+1)\cdot...\cdot(z+1)$ kan kun give 11 hvis alle faktorer pånær én er 1 og den sidste er 11. Derfor må det eftersøgte tal være et primtal opløftet i 10 potens.

$2^{10} = 512$ og der er således ikke ‘plads’ til større primtal opløftet i 10 potens. Det eftersøgte tal er derfor 512.

Øvelse 12

1) sfd(72,25)
Da $72 = 2^3 \cdot 3^2$ og $25 = 5^2$ er sfd(72,25) = 1. I mfm(72,25) skal alle primfaktorerne indgå med maksimal vægt. Dvs. $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$.

2) Hvis forskellen skal være lille, skal de to tal indeholde de samme primfaktorer med fx kun et 2-tal som afvigelse. Fx $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$ og $3^3 \cdot 5^2$. sfd af de to tal er $3^3 \cdot 5^2$ og mfm er $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

4) Dette argument kan holdes på mindre symbolkrævende plan, hvis man konstaterer, at $a \cdot b$ indeholder alle de forekommende primfaktorer i a og b, men det gør mfm(a,b) også, idet dog de primtal, der er fælles for a og b, ikke kommer med to gange, men de kommer med i sfd(a,b), hvor de netop kommer med i den lavere potens, der blev udeladt i mfm(a, b). Derfor kommer alle primfaktorer i a og b med i den rette potens når man multiplicerer mfm(a,b) og sfd(a,b).

Øvelse 13

Du kan blot kopiere beviset for sætning 6 efter at 2 overalt erstattes med 17. Det samme kan du gøre med ethvert tal *x*, som ikke er et kvadrattal eller kvadratet på en brøk, se øvelse 14.

Øvelse 14

Antag at $\sqrt{n}$ er et rationalt tal. $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ hvor brøken er forkortet mest muligt.

Som i beviset for sætning 6 får vi så at $n = \frac{p^2}{q^2}$ er en uforkortelig brøk, og dermed (atter som i beviset for sætning 6) at $n = p^2$. Den eneste situation hvor dette ikke giver anledning til en modstrid, er hvis n er et kvadrattal.

Altså er $\sqrt{n}$ irrational på nær når n er et kvadrattal.

Øvelse 15

n er lige er ensbetydende med at n^2 er lige

n er lige er en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for at n^2 er lige

n er lige $\Leftrightarrow n^2$ er lige.

Kapitel 10 Hvordan får vi styr på uendeligheden?

Øvelse 1
(I første oplag af bogen refereres der i øvelsen til definition 4. Det skulle være definition 2)

Hvis f er en injektiv afbildning, så afbilder den aldrig to tal i det samme tal. Derfor må alle tre tal afbildes i noget forskelligt, hvilket vil sige, at hele mængden {1,2,3} rammes, hvilket igen vil sige, at f er surjektiv. Ifølge definition 2 er mængden da endelig.

Hvis læseren synes, at vi ovenfor lod os rive med af dagligsproget, og at formuleringen ikke giver et eksakt bevis, så kan man i stedet se på alle de seks mulige injektive afbildninger af {1,2,3} til sig selv. De kan angives på tabelform.

	1	2	3
Mulige afbildninger	1	2	
	1	3	
	2	1	
	2	3	
	3	1	
	3	2	

Tabellen viser de muligheder, der er for at fastlægge en afbildning af de to første tal. I alle tilfældene er der kun ét muligt valg for, hvad afbildningen kan gøre ved 3, hvis det skal være en injektiv afbildning. 3 må i alle tilfældene afbildes i det element, der endnu ikke har været brugt. Så man også på denne måde se, at alle de injektive afbildninger bliver surjektive.

De hele tal er ikke en endelig mængde ifølge vores definition. Definer fx. afbildningen $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ ved $f(t)=2\cdot t$. f er injektiv, da $2\cdot t$ giver noget forskelligt for alle forskellige hele tal t. Billedet af $\mathbb{Z}$ bliver alle de lige tal. f er derfor ikke surjektiv (de ulige tal rammes ikke). Mængden er da pr. definition 2 uendelig.

Øvelse 2
Man kan bede de studerende om at sætte sig ned og lade være med at sidde flere på hver stol. Hermed etableres en injektiv afbildning fra mængden af studerende til mængden af stole. Hvis der så viser sig at være ubesatte stole, så er afbildningen klart ikke surjektiv, og ifølge vores definition på færre end (definition 3) er der færre studerende end stole.

Hvis vi skal afgøre det, før de studerende komme ind i lokalet og stadig vil være tro mod vores definition 3, så kunne vi lave følgende afbildning fra mængden af stole til mængden af studerende. Vi nummererer stolene fortløbende fra 1 og opad. Ligeledes med de studerende. Funktionen knytter så stolen med nummer 1 til den studerende med nummer 1, stolen med nummer 2 til den studerende med nummer 2 osv. Vi kan hurtigt afgøre, hvilken vej denne afbildning ikke vil være surjektiv. Det er altså blot en dybere måde at anvende tællemetoden på. Den mængde, der optælles til det største tal i tælleremsen, har også flest elementer.

Lad f være afbildningen, der til ethvert primtal p i [300,400] knytter tallet $p - 1$. Da dette tal er lige er det sammensat, og det ligger i intervallet [300,400], da 300 ikke er et primtal. Denne klart injektive afbildning rammer dog ikke alle sammensatte tal, idet 400 ikke rammes. Når der således findes en injektiv, men ikke surjektiv afbildning fra mængden af primtal til mængden af sammensatte tal, så er der pr. definition 5 tale om, at der er færre primtal, end der er sammensatte tal.

(Primtallene mellem 300 og 400 er: 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397. Der er altså 16 sådanne primtal. Dermed er der 84 sammensatte tal i intervallet, altså er det rigtigt, hvad vi skriver).

Taflet klarer vi nemt, hvis vi kan se, at der er en dessertgaffel ved hver kuvert, og der også er et portvinsglas ved hver kuvert. Hermed etableres en bijektion fra mængde af dessertgafler til mængden af kuverter og herfra til mængden af portvinsglas. Den sammensatte funktion bliver en funktion fra mængden af dessertgafler til mængden af portvinsglas. (Læseren bedes bære over med, at vi således problematiserer det helt elementære, men det er missionen med dette kapitel).

Øvelse 3

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$ så $\frac{2}{3}$ er nummer 8 på listen.

Hvornår kommer vi til $\frac{117}{201}$, dvs. en brøk med sum af tæller og nævner på 318?
Denne brøk vil efter systematikken ovenfor være den 117. brøk i opskrivningen af brøker med tæller + nævner = 318. Vi mangler blot at finde ud af, hvor mange brøker vi har skrevet, inden dem med tæller + nævner = 318 dukker op.
Der er 1 brøk med tæller + nævner = 2
Der er 2 brøker med tæller + nævner = 3
Der er 3 brøker med tæller + nævner = 4
.
.
.
Der er 316 brøker med tæller + nævner = 317.
Derfor har vi skrevet 1 + 2 + 3 + ... + 317 = 50.403 brøker, inden vi går i gang med dem, hvor tæller + nævner = 318.

$\frac{117}{201}$ er derfor nummer 50.403 + 117 = 50.520 på listen, hvis det ikke var, fordi vi vil undgå at tælle brøker, der angiver samme rationale tal med to gange. Så konklusionen er, at vi når frem til brøken $\frac{117}{201}$ senest, når vi har talt 50.403 brøker op.

Øvelse 4

Fejlen består i antagelsen om, at de to flokke på hhv. n og 1 køer har samme farve. Det kan vi ikke vide. Tænk på situationen, hvor der er 2 køer. Den ene fjerner vi, så har den resterende ko ganske rigtigt én farve. Men når vi i induktionsskridtet bytter om på de to køer, kan vi ikke vide, at de har den samme farve.

Kapitel 11 Algebras stofdidaktik

Øvelse 3

Idet vi skriver F for falsk og S for sand, får vi:

$a^2 \geq a$, F

$\sqrt{a} \leq a$ (forudsat a > 0), F

$\frac{11a+7}{6a} = \frac{11+7}{6} = 3$, F

$\frac{a}{c} : \frac{c}{d} = \frac{a}{d}$, F

$\sqrt{a^2 \cdot 16} = a \cdot 4$, hvis a er positiv, S

$\sqrt{a^2 + 16} = a + 4$, hvis a er positiv, F

$b^3 + b^4 = b^7$, F

$4a^2 \cdot 2b^2 = 8a^2b^2$ S

$4a^2 + 2b^2 = 6a^2b^2$, F

$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + c^2}} = \frac{a}{b+c}$, for a, b og c positive, F

Øvelse 12

A = artillerister, K = kavalerister og I = infanterister

A = 3K

I = 4A

3520 = A + I + K = A + 4A + $\frac{1}{3}$A

3520 =5$\frac{1}{3}$A

A = 660, I = 2640, K = 220

Øvelse 13

$$\left((x+6)\cdot 2-2\right):2-x=$$
$$\left(2x+12-2\right):2-x=$$
$$\left(2x+10\right):2-x=$$
$$x+5-x$$
$$5$$

Øvelse 14

Fx: "Hvorfor får du sytten, hvis du tænker på et tal, som du firedobler, før du lægger 10 til og halverer resultatet, som du nu lægger 9 til, før du halverer endnu en gang for til sidst at trække det oprindelige tal fra og lægge 10 til?".

Kapitel 12 Talmønstre og figurrækker

Øvelse 2

Nummer	1	2	3	...	n
Trekanttal	1	3	6	...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Firkanttal	1	4	9	...	n^2
Sekskanttal	1	6	15	...	$(2n-1)\cdot n$
k-kanttal	1	k	$3k-3$	...	$\frac{\big((k-2)n-(k-4)\big)\cdot n}{2}$

Rekursive formler:

Trekanttal: $T(n+1)=T(n)+n+1$,
Firkanttal: $F(n+1)=F(n)+2(n+1)-1$,
Sekskanttal: $S(n+1)=S(n)+4(n+1)-3$,
k-kanttal: $K(n+1)=K(n)+(k-2)(n+1)-(k-3)$.

Øvelse 3 - selvfølgelig skal den ikke hedde opgave 3.

Nummer	1	2	3	...	n
'Trekanterne'	1	9	18	...	$3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$
'Firkanterne'	4	10	18	...	$n\cdot(n+3)$
'Dobbelttrappen'	4	13	26	...	$2n^2+3n-1$
'Sekskanterne'	12	36	60	...	$24n-12$

Rekursionsformler:

'Trekanterne': $T(n)=T(n-1)+3n$.
'Firkanterne': $F(n)=F(n-1)+2n+2$.
'Dobbelttrappen': $D(n)=D(n-1)+4n+1$.
'Sekskanterne': $T(n)=T(n-1)+24$.

Øvelse 4

Summen af de første n naturlige tal $S(n)$.
Da $S(n+1)=1+2+...+(n-1)+n+(n+1)=S(n)+n+1$ har vi en rekursiv formel for talfølgen $S(n+1)=S(n)+n+1$.
Opgaven postulerer, at vi kan finde $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, og vi skal bevise dette pr. induktion.

I. Første skridt er at vise, at formlen er korrekt, når n = 1.
$S(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+1)=1$, hvilket er summen af det første naturlige tal.

II. Vi antager nu, at formlen gælder for tallet n, altså at vi kan beregne summen af de første n naturlige tal som $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, og så skal vi bevise, at formlen også gælder for nummer n + 1.

Hvis vi sætter n + 1 ind i formlen, får vi
$S(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)=$
$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1.$
Vi skal altså ud fra $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$ prøve at bevise $S(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1.$

Det eneste, vi ved med sikkerhed, er, at vi kan beregne $S(n+1)$ ud fra sammenhængen $S(n+1)=S(n)+n+1$. Da vi har antaget, at $S(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$, kan vi beregne $S(n+1)$ til
$S(n+1)=S(n)+n+1=\frac{1}{2}n(n+1)+n+1=$
$\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+n+1=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

Så det lykkedes os at bevise $S(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$. Det sidste udtryk er det samme som formlen gav, og der er derfor overensstemmelse mellem det, formlen fortæller og den rekursive sammenhæng, og induktionsbeviset er fuldført, idet vi nu kan anvende induktionsaksiomet, Peanos 5. aksiom.

Vi giver endnu et induktionsbevis for en af formlerne fra øvelse 3

Vi fandt for 'dobbelttrappen', at $D(n)=D(n-1)+4n+1$, eller samme formel udtrykt for nummer n + 1: $D(n+1)=D(n)+4(n+1)+1$. Vi har også angivet, at vi 'tror', at vi kan beregne $D(n)$ ud fra formlen $D(n)=2n^2+3n-1$, men dette er endnu ikke bevist.

Vi vil nu ved hjælp af et induktionsbevis påvise, at der faktisk gælder $D(n)=2n^2+3n-1$ for alle naturlige tal n.

I. For at benytte induktionsbeviset, skal vi sikre os, at formlen passer for n = 1.
$D(1)=2\cdot 1^2+3\cdot 1-1=4$, hvilket er det korrekte antal tændstikker.

II. Vi antager derfor, at formlen er korrekt for nummer *n*, altså at vi kan beregne antal tændstikker i den *n*'te figur ved $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$.

Vi skal nu bevise, at formlen også er korrekt for figur nummer *n* + 1. Vi vil først lige finde ud af, hvordan den formel egentlig ser ud for $D(n+1)$. Sætter vi *n* + 1 ind i formlen, får vi

$$D(n+1) = 2(n+1)^2 + 3(n+1) - 1 =$$
$$2(n^2 + 2n + 1) + 3(n+1) - 1 =$$
$$2n^2 + 7n + 4.$$

Vi skal nu bevise at $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$ medfører, at $D(n+1) = 2n^2 + 7n + 4$.

Det eneste vi med sikkerhed ved er, at $D(n+1) = D(n) + 4(n+1) + 1$. Vi kan beregne $D(n+1)$, idet vi på højre side indsætter $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$. Vi får så

$$D(n+1) = D(n) + 4(n+1) + 1 =$$
$$2n^2 + 3n - 1 + 4(n+1) + 1 =$$
$$2n^2 + 7n + 4.$$

– altså præcis det ønskede, det samme som formlen giver, når vi indsætter *n* + 1.

Vi kan nu ud fra induktionsaksiomet slutte, at formlen $D(n) = 2n^2 + 3n - 1$ gælder for alle naturlige tal *n*.

Øvelse 5 – selvfølgelig skal den ikke hedde øvelse 8, som den hedder i 1. oplag af bogen.

Antallet af træk, der skal til at flytte et tårn med *n* skiver, er $2^n - 1$.

Øvelse 6 – selvfølgelig skal den ikke hedde øvelse 9, som den gør i 1. oplag

Hvis $O(n)$ betegner omkredsen af figuren efter *n* inddelinger af siderne, gælder der

$$O(n) = \tfrac{4}{3} O(n-1)$$

eftersom en kant ved hver inddeling får lagt en tredjedel af sin oprindelige længde til. Vi kan derfor regne baglæns

$$O(n) = \tfrac{4}{3} O(n-1) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^2 O(n-2) = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 O(n-3) ... = \left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1} O(1).$$

Da vi forudsætter, at den første trekant har omkreds 3, får vi derfor $O(n) = 3 \cdot \left(\tfrac{4}{3}\right)^{n-1}$.

Kapitel 13 Tidlig algebra

Ingen løsningsforslag.

Kapitel 14 Funktioner og funktionsbegrebet

Øvelse 7

1) $y = 3,5x$
2) $y = \frac{14}{x}$
3) $y = 2x + 3$

1) billedmængde $[14, \infty[$

2) billedmængde $\left]0, 3\tfrac{1}{2}\right]$

3) billedmængde $[11, \infty[$

Øvelse 8

1) Den direkte proportionalitet *f*, hvor $f\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{3}{5}$, angives:

$x = \frac{22}{7}$ og $f(x) = \frac{3}{5}$ indsættes i $f(x) = ax$,
hvilket giver $f(x) = \frac{21}{110}x$.

2) Den omvendte proportionalitet *g*, hvor $g\left(\frac{22}{7}\right) = \frac{3}{5}$, angives:

$x = \frac{22}{7}$ og $g(x) = \frac{3}{5}$ indsættes i $g(x) = \frac{k}{x}$,hvilket giver $k = \frac{66}{35}$ og dermed $g(x) = \frac{66}{35} \cdot \frac{1}{x}$.

3) Den lineære funktion, hvis graf indeholder punkterne $\left(\frac{22}{7}, \frac{3}{5}\right)$ og $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$ findes:

Hældningskoefficienten α findes ved at indsætte punkternes koordinater i $\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, hvilket giver $\alpha = -\frac{126}{335}$.

α samt det ene punkts koordinater indsættes i : $y = \alpha x + b$,
hvilket giver $y = h(x) = -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335}$.

4) a. Billedmængden for f svarende til $x \le 0$: Vi har $f(x) = \frac{21}{110}x$. For $x \le 0$ bliver højre side negativ eller 0, dvs. billedmængden af $x \le 0$ bliver det negative reellele tal samt 0, eller udtrykt i mængdelærens sprog: $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 0\}$.

b. Billedmængden for g svarende til $x \le 0$: Vi har $g(x) = \frac{66}{35} \cdot \frac{1}{x}$. Her må vi undgå $x = 0$ for at undgå x i nævneren. Men $x < 0$ svarer til at x gennemløber alle negative tal, hvilket er ensbetydende med, at $\frac{1}{x}$ gennemløber alle negative tal og dermed også, at $g(x)$ gennemløber alle negative tal. Billedmængden bliver altså de negative reelle tal eller i mængdelærens sprog: $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$.

c. Billedmængden for h når $x \le 0$: Vi har $h(x) = -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335}$.

Tænker vi på det som en ret linje med negativ hældning, der skærer y-aksen i punktet $(0, \frac{597}{335})$ får vi, at det, der ligger i 2. kvadrant og over den rette linje, udgør billedmængden. Mere præcist bliver billedmængden $\{y \in \mathbb{R} \mid y \ge \frac{597}{335}\}$.

Dette kan også skrives detaljeret med brug af de regler der gælder for manipulation med uligheder og som vi så på i forrige kapitel:

$$x \le 0 \Leftrightarrow \frac{126}{335}x \le 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{126}{335}x + \frac{597}{335} \ge \frac{597}{335} \Leftrightarrow h(x) \ge \frac{597}{335}$$

Øvelse 9

Lineær funktion. x angiver antal km. pris(x) = $30x + 20$.

Øvelse 12

Det viser sig, at der i værste tilfælde skal tre punkter til at afgøre, om der er tale om en ligefrem proportionalitet: $f(x) = x$, en omvendt proportionalitet: $f(x) = \frac{k}{x}$, $x \ne 0$ eller den lineære funktion: $f(x) = ax + b$.

Hvis man ved, hvilken af de tre typer der er tale om, er det nok med to punkter. Så ud fra to punkter kan man få fastlagt helt konkret, hvilken funktion der kan være tale om inden for hver kategori.

Er man usikker på, hvilken type der er tale om, indsætter man det tredje punkt i hver af de mulige, og det vil kun stemme i en af dem, hvorefter man har bestemt typen og kan fastlægge den konkrete funktion.

Der kan blive problemer med specialtilfælde, så lad os præcisere, at vi ikke regner $y = \frac{k}{x}$ for en omvendt proportionalitet, hvis k=0.

At to forskellige typer af disse funktioner ikke kan skære hinanden i tre forskellige punkter er indlysende ud fra grafernes geometriske form, men det bliver lidt mere besværligt, hvis man skal vise det algebraisk.

Kapitel 15 Problemløsning og modellering

Øvelse 1

1)
$x \cdot 3 - 1 = 25 + x$

$2x = 26$

$x = 13$

2) Den korrekte ligning er
$3x = \frac{1}{2}O$

3) De to aldre kaldes x og y.
$x + y = 24$ og $y = x + 6$
Indsættes den ene ligning i den anden får man
$x + x + 6 = 24$

$x = 9$

Dvs. brødrene er hhv. 9 og 15 år gamle.

4) Hvis man kalder den korte side x, er den lange side $3x$. Den samlede omkreds er derfor $8x$, og vi får x = 11,25. Siderne er altså 11,25 cm og 33,75 cm.

5) d er antal dage. Omkostningerne er $800 + 300d + d \cdot 10 \cdot 4 = 340d + 800$
Der skal derfor gælde
$340d + 800 \leq 400$

$d \leq 9{,}41$
så turen kan maksimalt vare i 9 dage.

6) S er søslanges længde.
Der gælder
$S = 40 + \frac{1}{2}S$

$\frac{1}{2}S = 40$

$S = 80$
Søslangen er 80 meter.

Øvelse 2

$A-3=B$.
$C=\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}(A-3)$.

Indsættes dette i $A+B+C=28$ får man:
$A+A-3+\frac{1}{2}(A-3)=28$

$\frac{5}{2}A-\frac{9}{2}=28$

$\frac{5}{2}A=\frac{65}{2}$

$A=13$.
B og *C* bestemmes så til *B* = 10 og *C* = 5.

Eller

$2C=B$
$A=B+3=2C+3$.

Indsættes dette i $A+B+C=28$ får man:
$A+B+C=28$

$2C+3+2C+C=28$

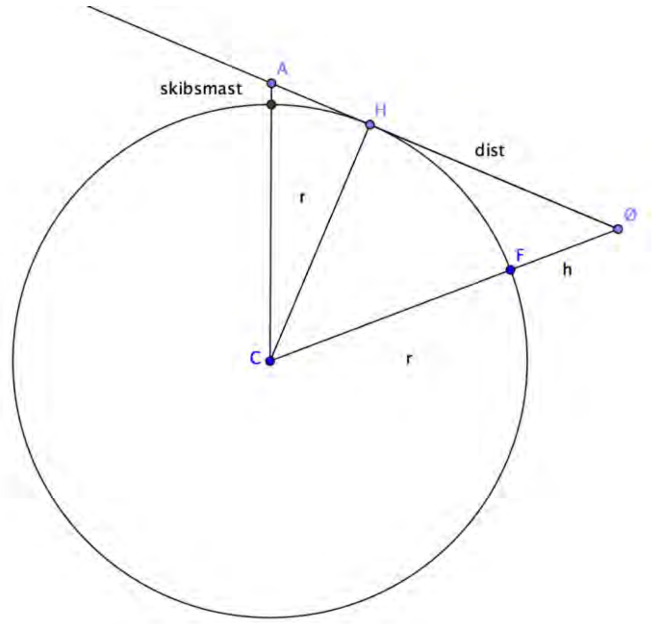
$5C=25$

$C=5$
A og *B* bestemmes så til *A* = 13 og *B* = 10.

Undersøgelse 2
Hvis rebets tværsnitsareal er *a* (målt i cm^2) og rumfanget af rebet (målt i cm^3) er beregnet ud fra den hule cylinder som, $\pi h(R^2-r^2)$ hvor *R* er den 'udvendige' radius og *r* den 'indvendige' radius, er $\frac{\pi h(R^2-r^2)}{a}$ et fornuftigt bud på længden af rebet målt i cm. Hvis rebet ikke er pakket tæt på rullen, men der er luft imellem, reduceres længden. Hvis der fx er 20 % luft skal tælleren i ovennævnt udtryk ganges med 0,80, hvilket altså også vil reducere længden med 20 % i forhold til vores første bud uden reduktion.

Undersøgelse 3

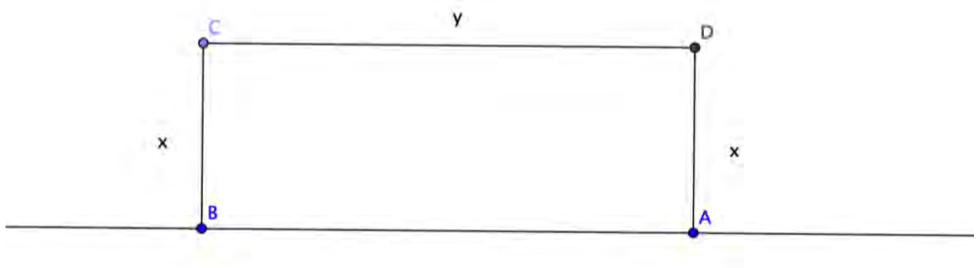
Jordens radius er ca. 6.400 km.



Ø er øjet. *H* er, hvor man ser horisonten, *F* er fodpunktet for beskueren. Den retvinklede trekant *ØHC* har kun én ubekendt længde, og kan derfor benyttes til at beregne afstanden til horisonten ved hjælp af Pythagoras' sætning.

På den anden side af horisonten er skibets mastehøjde af betydning for, hvor langt væk skibet er, når man ser masten forsvinde bag horisonten. Hvis vi kan antage at skibets mast ender 15 meter over vandoverfladen, er der igen kun AH der er ubekendt i den retvinklede trekant CHA. AH kan derfor beregnes ved hjælp af Pythagoras' sætning.

Øvelse 5



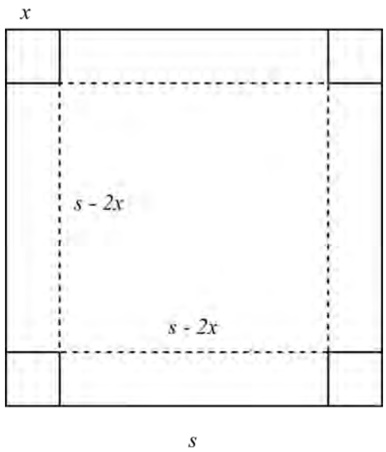
Areal $x \cdot y$ og $2x + y = 400$. Indsættes $y = 400 - 2x$, ser vi, at det er udtrykket:
$x \cdot (400 - 2x) = -2x^2 + 400x$, der skal optimeres.

Det kan ske på en af måderne nævnt i teksten. Man kan også observere, at der er tale om et andengradspolynomium, hvis grafiske billede er en parabel, der ifølge formelsamlingen har toppunkt for $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-400}{-4} = 100$.

Det optimale rektangel bliver dobbelt så langt som bredt, hvilket ikke er så forbavsende, for hvis også ejeren af nabogrunden lavede en tilsvarende optimal rektangulær indhegning, så ville de to tilsammen danne et kvadrat.

Undersøgelse 4

Hvis papirets bredde er s, og vi folder stykket x op som kant, kan situationen beskrives med denne tegning:



Rumfanget er $x(s - 2x)^2$

Undersøgelse 5

Hvis s er sænkningen i prisen målt i kr., kan man beskrive antallet af passagerer som $8000-550s$. Billetprisen er $18-s$. Den samlede indtjening er derfor $(8000-550s)(18-s)$. Der findes igen mange måder at bestemme maksimum for denne funktion på. Den optimale løsning ligger ved en s-værdi på $\frac{19}{11}$ eller ca. 1,75 kroner. Realistisk set må man nok runde prisen ned med et helt antal kroner fx 2 kroner.

Undersøgelse 6

Antal solgte enheder per uge skønnes altså at være $antal(p)=4000-150p$.
Det indbringer en samlet salgspris på $antal(p)\cdot p$, men også en direkte produktionsomkostning på $antal(p)\cdot 5$. Hermed er bruttoprofitten:
$antal(p)\cdot p-antal(p)\cdot 5=(4000-150p)\cdot(p-5)=-150p^2+4750p-20000$

Maksimum kan bestemmes på flere måder, fx ved toppunktsformlen for en parabel, der giver den optimale pris på $p=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4750}{-300}=15,83$ kr. og dermed en ugentlig bruttoindkomst på 17.604 kr.

I en virkelig produktion kan det diskuteres om en så lille profit kan dække de øvrige mere faste omkostninger, så vi kan ikke i dette lille konstruerede eksempel afgøre, om der er tale om en god forretning.