Forslag til løsninger til opgaver i

Matematik – En grundbog for lærerstuderende

Forslag til løsning af "Opgaver til afsnittet om de naturlige tal"(side 80)

Opgave 1

Vi skal tegne alle de linjestykker, der forbinder 2 vilkårligt valgte punkter blandt de 4 punkter. Gennem forsøg finder vi ret nemt, at der kan tegnes 6 linjestykker. Vi kan også ræsonnere kombinatorisk. Ethvert punkt blandt de 4 punkter skal forbindes med de 3 øvrige punkter. Det giver $4 \cdot 3 = 12$ linjestykker. Men herved bliver hvert linjestykke talt med 2 gange, så vi må dele med 2. Tilføjer vi et punkt mere – dvs. der nu er 5 punkter - så skal dette punkt forbindes med de 4 oprindelige punkter, og det kræver 4 nye linjestykker. En yderligere udvidelse til 6 punkter vil udvide antallet af linjestykker med 5. Det betyder, at hvis vi til en punktmængde på n punkter tilføjer endnu et punkt, vil vi øge antallet af linjestykker med n. Den opmærksomme læser, vil nok ane, at det igen er trekanttallene, der er på spil.

4 punkter giver $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ forbindende linjestykker.

5 punkter giver $6 + 4 = 10$ linjestykker, der er det samme som $\frac{5 \cdot 4}{2}$ linjestykker.

6 punkter giver $10 + 5 = 15 = \frac{6 \cdot 5}{2}$ linjestykker.

n punkter giver $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Opgave 2

Man kan prøve sig frem og herved indse, at der i en *4-kant* kan tegnes 2 diagonaler, i en *5-kant* er der 5 diagonaler, og i en *6-kant* er der 9 diagonaler. Måske har man gennem eksperimenterne fundet et system, f.eks. at der i en *7-kant* kan tegnes 5 flere diagonaler end i en *6-kant*, fordi en af siderne i *6-kanten* nu er blevet diagonal, og fordi der fra det 7'ende punkt kan tegnes $7 - 3 = 4$ nye diagonaler.

Det generelle argument kan være et af følgende 2 forslag:

1) Fra ethvert punkt i *n-kanten* kan der tegnes $n - 3$ diagonaler, fordi der ikke kan tegnes en diagonal til punktet selv og heller ikke til de to nabopunkter, idet disse vil være sider i *n-kanten.* Det giver $n \cdot (n-3)$ diagonaler. Men igen vil hver diagonal blive talt med 2 gange, hvorfor der skal divideres med 2. Den generelle formel bliver derfor: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

2) I opgave 1 fandt vi, at der mellem n punkter kan tegnes $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ forbindelseslinjer. Men n af disse linjestykker vil være sider i *n-kanten*. Dem må vi derfor fratrække. Vi får således:
$$\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-1)}{2} - \frac{2 \cdot n}{2} = \frac{n \cdot ((n-1)-2)}{2} = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

Opgave 3

Vi adderer de 2 udtryk:

$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}=\frac{(n+1)\cdot(n+(n+2))}{2}=\frac{(n+1)\cdot(2n+2)}{2}=\frac{(n+1)\cdot 2\cdot(n+1)}{2}=(n+1)^2.$$

I første omgang sættes den fælles faktor $n+1$ uden for parentes. Herudover er der tale om reduktion af udtrykket.

Vi har hermed vist, at summen af 2 på hinanden følgende trekanttal er kvadratet på det sidste trekanttals nummer.

Opgave 4

1) $\sqrt{1991}=44,6$ (1 dec.). Det betyder, at vi skal undersøge, om der findes primtal mindre end 45, der går op i 1991. Det viser sig, at 11 går op, og vi får kvotienten 181. Tallet 181 er et primtal, da ingen af primtallene mindre end 13 $(\sqrt{181}=ca.13,45)$ går op i 181. Vi har hermed: $1991=11\cdot 181.$ 1991 er således ikke et primtal.
2) Det ses straks, at 3 går op i 897, da 3 går op i tværsummen: $8+9+7=24$.
   Tallet har i øvrigt primfaktoropløsningen: $897=3\cdot 13\cdot 23$.
3) Da $\sqrt{1517}$ er ca. 39, skal vi forsøge med primtallene til og med primtallet 37. Det viser sig, at netop 37 går op i 1517, og vi får $1517=37\cdot 41$.
4) Da der ikke er noget primtal mindre end 45 $(45^2=2025)$, der går op i 1993, må vi konkludere, at tallet 1993 er et primtal.
5) 103 er et primtal.
6) 859 er et primtal.

Opgave 5

Tallene har følgende primfaktoropløsning:

$231=3\cdot 7\cdot 11$; $143=11\cdot 13$; $170=2\cdot 5\cdot 17$; $289=17^2$; $299=13\cdot 23$; $455=5\cdot 7\cdot 13$; 61 er et primtal; $93925=5^2\cdot 13\cdot 17^2$; $713=23\cdot 31$.

Opgave 6

Euklids algoritme kan bruges:

$385=66\cdot 5+55$	$385=231\cdot 1+154$
$66=55\cdot 1+11$	$231=154\cdot 1+77$
$55=11\cdot 5$	$154=77\cdot 2$

Det betyder, at $sfd(66,385)=11$ og $sfd(231,385)=77$

Vi kunne også have lavet primfaktoropløsningen for de 2 tal, f.eks. $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$ og $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$.

Af primfaktoropløsningerne følger, at $7 \cdot 11 = 77$ er den største fælles divisor for de 2 tal 231 og 385.

Opgave 7

Tallene har følgende primfaktoropløsning:

$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \quad 143 = 11 \cdot 13 \quad 65 = 5 \cdot 13$

Heraf følger: $mfm(231,143) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 3003$ og $mfm(143,65) = 5 \cdot 11 \cdot 13 = 715$.

Man kunne også se på multipla af tallene (dvs. tallet gange med henholdsvis 1, 2, 3, 4,…), f.eks. for de 2 tal 143 og 65:

$143 \quad 286 \quad 429 \quad 572 \quad 715 \quad 858 \quad 1001 \quad 1144...$
$65 \quad 130 \quad 195 \quad 260 \quad 325 \quad 390 \quad 455 \quad 520 \quad 585 \quad 650 \quad 715..$

Første gang vi møder det samme tal i de 2 rækker er ved tallet 715. Dette tal er derfor det mindste tal, som de 2 tal 65 og 143 går op i.

Opgave 8

I tabellen nedenunder er $n^2 - n + 41$ udregnet ved indsættelse af tallene 1, 2, 3,… i stedet for *n*.

Tal nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	41
$n^2 - n + 41$	41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	41^2

Det ser ganske rigtigt ud til, at vi udelukkende får primtal. Men indsætter vi tallet 41, får vi 41^2, der er et sammensat tal, så vi har alligevel ikke en formel, der altid giver et primtal.

Opgave 9

Da $6125 = 5^3 \cdot 7^2$, følger det af sætningen side 57 omkring antallet af divisorer,

at tallet 6125 i alt har $(3+1)(2+1) = 12$ divisorer.

5	6125
5	1225
5	245
7	49
7	7
	1

Opgave 10

Ser vi på tegningen for opdelingen af kvadratet $8 \times 8,$ har linjen, der deler det øverste rektangel i 2 trapezer, en hældning på $\frac{2}{5}$ (eller omvendt), og linjen, der deler det nederste rektangel i 2 trekanter, har en hældning på $\frac{3}{8}$. Da $\frac{2}{5} \neq \frac{3}{8}$ kan diagonalen i rektanglet 5×13 ikke være en ret linje. I virkeligheden skjuler der sig en kvadratenhed langs denne diagonal.

Opgave 11

Man opdager nok, at det første tal i hver række er et kvadrattal, f.eks. er det første tal i 4. række tallet 16, men kvadrattallet 16 er summen af de ulige tal: $1+3+5+7.$ Indsætter vi dette i stedet for 16 og rykker lidt rundt på addenderne, får vi på venstre side af lighedstegnet:

$$(1+3+5+7)+17+18+19+20=(1+20)+(3+19)+(5+18)+(7+17)=21+22+23+24$$

Dette er netop lig med ligningens højreside. Bevisideen kan generaliseres, så det kan vises, at der også gælder lighedstegn i n'te række, hvilket vi dog ikke vil gøre her.

Opgave 12

Dette talmønster vil fortsætte et stykke endnu, men når vi kommer op på et tal med ti cifre, vil det system af ettaller, vi skal addere for at få resultatet af multiplikationen, give en mente i tallets midterste ciffer, og hermed ødelægges mønstret.

Opgave 13

Der påstås, at $\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi}.$ Regner vi videre på denne ligning, får vi:

$$\varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \Leftrightarrow \varphi = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}.$$

Idet vi alene ser på den positive rod i andengradsligningen, kan vi konstatere, at et positivt tal, der har den angivne egenskab er lig med $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618034$ (6 dec.). Men dette tal er jo netop det gyldne snits forhold. Altså er φ det eneste tal med denne egenskab, der med indsættelse af decimaltallet for φ, siger:

$$1{,}618034 - 1 = \frac{1}{1{,}618034} \Leftrightarrow 0{,}618034 = \frac{1}{1{,}618034} \Leftrightarrow 1{,}618034 = \frac{1}{0{,}618034}$$

Opgave 14

I søjlen under rækkesum får vi kubiktallene, og i søjlen med "sum i alt" er alle tallene kvadrattal, og vel at mærke kvadratet på trekanttallene 1, 3, 6, 10, 15,…

Vi kan altså ud fra opstillingen få en ide om, at summen af kubiktallene op til et vis nr. n er lig med kvadratet på det n'te trekanttal. Da trekanttal nr. n er lig med summen af de *n* første naturlige tal, er dette netop, hvad der udtrykkes i ligningen: $1^3+2^3+3^3+...+n^3=(1+2+3+...+n)^2$

				Rækkesum	Sum i alt	n^2
			1	1	1	1
		3	5	8	9	3^2
	7	9	11	27	36	6^2
13	15	17	19			

Opgave 15

$$1\cdot2\cdot3\cdot4+1=25=5^2$$
$$2\cdot3\cdot4\cdot5+1=121=11^2$$
$$3\cdot4\cdot5\cdot6+1=361=19^2$$
$$4\cdot5\cdot6\cdot7+1=841=29^2$$
$$5\cdot6\cdot7\cdot8+1=1681=41^2$$

Sammenhængen kan nok være lidt vanskelig at få øje på. Men det ser ud til, at produktet af de 2 midterste tal i opstillingen er 1 større end det tal, der skal kvadreres. Og så spørger man selvfølgelig: Hvorfor er det nu sådan?

Ved undersøgelser af, om der er et specielt mønster, når man multiplicerer 4 på hinanden følgende tal, opdager man måske, at produktet af de 2 midterste ser ud til at være 2 større end produktet af de 2 yderste tal. Vi generaliserer. Produktet af 4 på hinanden følgende naturlige tal kan f.eks. se sådan ud: $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)$. Vi udregner differensen mellem produktet af de 2 midterste tal: $n\cdot(n+1)$ og produktet af de 2 yderste tal:

$$n\cdot(n+1)-(n-1)\cdot(n+2)=n^2+n-(n^2-n+2n-2)=n^2+n-n^2+n-2n+2=2$$

Da der således altid er en forskel på 2 mellem de 2 nævnte tal, befinder der sig et tal midt imellem disse, som vi kan kalde x. Det betyder, at $n\cdot(n+1)=x+1$ og $(n-1)\cdot(n+2)=x-1$. Vi får derfor:

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1=(x+1)\cdot(x-1)+1=x^2-1+1=x^2$$

Vi har hermed vist, at tallet på højre side af lighedstegnet er lig med kvadratet på et tal, der er 1 mindre end produktet af de 2 midterste tal eller 1 større end produktet af de 2 yderste tal.

Opgave 16

1) Hvis vi tænker på tallet x, får vi følgende rækkefølge:

$$x \quad x+4 \quad 3\cdot(x+4) \quad 3\cdot(x+4)-9 \quad 3\cdot(3\cdot(x+4)-9) \quad 3\cdot(3\cdot(x+4)-9)+x$$
$$3\cdot(3\cdot(x+4)-9)+x-9$$

Vi udregner lige det sidste udtryk, før vi deler med 10:

$$3\cdot(3\cdot(x+4)-9)+x-9=3\cdot(3x+12-9)+x-9=9x+9+x-9=10\cdot x$$

Ved division med 10 giver dette ganske rigtigt x, dvs. det tal vi startede med.

2) I den næste opgave får vi rækkefølgen:

$$x \quad x+20 \quad 5\cdot\left(x+20\right) \quad 5\cdot\left(x+20\right)-x \quad \left(5\cdot\left(x+20\right)-x\right):4$$
$$\left(5\cdot\left(x+20\right)-x\right):4-100$$

Vi reducerer det sidste udtryk:

$$\left(5\cdot\left(x+20\right)-x\right):4-100=(5x+100-x):4-100=(4x+100):4-100=$$
$$x+25-100=x-75.$$

Her får vi ikke det tal, vi begyndte med. I stedet for at trække 100 fra til sidst skulle vi have fratrukket 25.

Opgave 17

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+...+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}.$$

1) Påstanden er sand for $n=1$, idet: $\frac{1}{2}=2-\frac{1+2}{2^1}\Leftrightarrow\frac{1}{2}=2-\frac{3}{2}$

2) Vi antager, at påstanden er sand for det naturlige tal n og skal herudfra vise, at så er den også sand for det naturlige tal $n+1$. I første linje i opstillingen nedenunder ser vi på, hvordan påstanden ser ud for tallet $n+1$. I den anden linje er induktionsantagelsen indsat på ligningens venstre side, idet de n første led er erstattet med $2-\frac{n+2}{2^n}$:

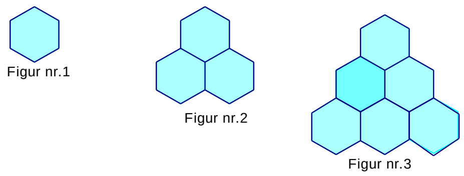
$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+.....+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}\Leftrightarrow$$
$$2-\frac{n+2}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\Leftrightarrow$$
$$2-\frac{2\cdot(n+2)}{2^{n+1}}+\frac{n+1}{2^{n+1}}=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\Leftrightarrow$$

$$2-(\frac{2\cdot(n+2)}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+1}})=2-\frac{n+3}{2^{n+1}}\Leftrightarrow$$
$$\frac{2\cdot(n+2)}{2^{n+1}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}=\frac{n+3}{2^{n+1}}\Leftrightarrow$$
$$\frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}}=\frac{n+3}{2^{n+1}}\Leftrightarrow\frac{n+3}{2^{n+1}}=\frac{n+3}{2^{n+1}}$$

Da sidste ligning er sand, er også første ligning sand.

Påstanden er hermed bevist ved induktion.

Opgave 18



Figur nr. n	1	2	3	4	5	6
Antal sekskanter	1	3	6	10	15	21
Omkreds	6	12	18	24	30	36
Antal linjestykker	6	15	27	42	60	81

1. Antallet af sekskanter bliver trekanttallene, idet f.eks. den fjerde figur vil indeholde 4 flere end den tredje figur. Formlen for trekanttal er: $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$.
2. Hver gang der tilføjes en ny række sekskanter øges omkredsen med 3 linjestykker for hver af de 2 nye hjørnesekskanter, mens resten af linjestykkerne i nederste række svarer til antallet af linjestykker i den nederste række i den foregående figur. Det betyder, at omkredsen øges med $2 \cdot 3 = 6$.

   Med en konstant forøgelse på 6 må formlen blive: $6 \cdot n$.

3. Den sidste formel kan vises ved induktion.

   Først kan vi konstatere, at formlen er sand for $n = 1$, idet: $\frac{3 \cdot 1 \cdot (1+3)}{2} = 6$

   Når vi går fra figur nr. n til figur nr. $n+1$, øges antal linjestykker med 3 for hver ny sekskant, idet der dog ved de 2 hjørner tilsammen sker en yderligere forøgelse på 3. I alt en forøgelse på $3 \cdot (n+2)$.

   Vi antager, at formlen er sand for tallet n.

   Dvs.: I figur nr. n er antallet af linjestykker: $\frac{3 \cdot n \cdot (n+3)}{2}$.

Antal linjestykker i figur nr. $n+1$ kan nu bestemmes ved addition af de 2 tal:

$$\frac{3\cdot n\cdot(n+3)}{2}+3\cdot(n+2)=\frac{3\cdot n\cdot(n+3)+2\cdot 3\cdot\left(n+2\right)}{2}=$$
$$\frac{3\cdot n^2+9n+6n+12}{2}=\frac{3n^2+15n+12}{2}.$$

Vi undersøger nu, om dette resultat stemmer overens med, hvad formlen for figur nr. $n+1$ siger:

$$\frac{3\cdot\left(n+1\right)\cdot(n+4)}{2}=\frac{\left(3n+3\right)\cdot\left(n+4\right)}{2}=\frac{3n^2+3n+12n+12}{2}=\frac{3n^2+15n+12}{2}.$$

Da de 2 udtryk er ens, er formlen bevist ved induktion.

Forslag til løsning af "Opgaver til procentregning" (side 171)

Opgave 1

1. Forskellen på de 2 procenttal er: $5,7-3,8=1,9$

   1,9 i procent af 3,8: $\frac{1,9\cdot 100}{3,8}\%=50\%$

   Altså tæt ved de 51%, som beskrevet i avisartiklen. Forskellen kan skyldes, at procentsatserne er afrundede.

2. Stigningen i USA: $\frac{(12,1-11)\cdot 100}{11}\%=10\%$.

   Stigningen i Norge: $\frac{(8,5-7,5)\cdot 100}{7,5}=13\frac{1}{3}\%$

   Norge har altså haft den største procentvise stigning.

Opgave 2

Hvis vi kan regne med, at de angivne procentsatser for økosalg går på de *penge*, vi bruger til fødevarer, kan vi regne som nedenfor:

$$5,6\%=470\text{ kr.}\Leftrightarrow 100\%=\frac{470\cdot 100}{5,6}\text{ kr.}=8392,86\text{ kr.}$$

$$5,7\%=470\text{ kr.}\Leftrightarrow 100\%=\frac{470\cdot 100}{5,7}\text{ kr.}=8245,61\text{ kr.}$$

Det gennemsnitlige forbrug til fødevarer for hver dansker ligger således mellem disse 2 tal. Problemet er bare, at procentsatserne $5,6-5,7\%$ måske ikke går på pengene, vi bruger til fødevarer, men til mængden af fødevarer. Hvis det er tilfælde, kan vi ikke regne som vist ovenfor, idet priser på forskellige fødevarer varierer. Det er ofte i sådanne artikler uklart, hvad procentsatserne helt præcis referer til.

Opgave 3

IC kører strækningen på: $3t.16\,\min.=196$ minutter. Hastigheden: $\frac{330\cdot 60}{196}km./t.=101,020\ km./t.$

Lyntog bruger: $2t.52\ \text{min.}=172$ minutter. Det giver en hastighed på: $\frac{330\cdot 60}{172}km./t.=115,116\ km./t.$

Lyntoget kører: $\frac{(115,116-101,020)\cdot 100}{101,02}=ca.14\%$ hurtigere end IC-toget.

Opgave 4

Hvis c er 100, vil a være 150 og b vil være 125.

a er således: $\frac{(150-125)\cdot 100}{125}\%=20\%$ større end b.

Forslag til løsning af ”Opgaver til ligningsløsning”(side172)

Opgave 1

Hvis sønnens alder er *x* år, så er faderens alder $3\cdot x$ år. Der går $2\cdot x$ år, før sønnen når op på $3\cdot x$ år.

Om $2\cdot x$ år har faderen en alder på: $3\cdot x+2\cdot x=5\cdot x$

Vi har derfor ligningen: $5x=80 \Leftrightarrow x=16.$

Sønnens alder i dag er 16 år og faderens er 48 år. Det passer med, at faderens alder om 32 år er lig med 80.

Opgave 2

Vi antager: A har *x* æbler og B har *y* æbler.

Oplysningerne kan oversættes til følgende ligninger:

$x+15=2\cdot y$ og $y+10=x$

Indsættes sidste ligning i den første ligning, får vi: $y+10+15=2y \Leftrightarrow y+25=2y \Leftrightarrow y=25$

Heraf følger: A har $25+10=35$ æbler og B har 25 æbler.

Opgave 3

Hvis hvert æble koster *x* kr. og A køber *y* æbler, har vi ligningen: $x \cdot y = 30$

Når prisen pr. æble i stedet er $(x-0,50)$ kr., vil A kunne købe $y+5$ æbler. Det giver ligningen: $(x-0,5)\cdot(y+5)=30$

Vi kan herefter løse følgende ligningssystem, idet såvel *x* som *y* skal være positive tal:

$$\begin{matrix} x\cdot y = 30 \\ (x-0,5)\cdot(y+5)=30 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x\cdot y = 30 \\ x\cdot y - 0,5y + 5x - 2,5 = 30 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{30}{y} \\ 30 - 0,5y + 5\cdot\dfrac{30}{y} - 2,5 = 30 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} x = \dfrac{30}{y} \\ -0,5y^2 + 150 - 2,5y = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{30}{y} \\ 0,5y^2 + 2,5y - 150 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{30}{y} \\ y = 15 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 2 \\ y = 15 \end{matrix}$$

Den negative rod i ovenstående andengradsligning kan ikke bruges, og den er udeladt i ovenstående.

Manden kan købe 15 æbler til en pris af 2 kr. stykket.

Opgave 4

Hvis købsprisen er *x* kr., så vil købspris + $x\%$´s fortjeneste være lig med 119 kr.

$$x + \frac{x\cdot x}{100} = 119 \Leftrightarrow 100x + x^2 - 11900 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 100x - 11900 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-100 \pm \sqrt{100^2 + 4\cdot 11900}}{2} \Leftrightarrow x = 70 \vee x = -170.$$

Købsprisen er $70\ kr.,$ idet den negative værdi ikke kan bruges.

Opgave 5

5 på hinanden følgende tal kan se sådan ud:

$$x \quad x+1 \quad x+2 \quad x+3 \quad x+4$$

Deres sum: $x+x+1+x+2+x+3+x+4=5x+10$

Der gælder derfor: $5x+10=555 \Leftrightarrow 5x=545 \Leftrightarrow x=109$

Tallene er: $109 \quad 110 \quad 111 \quad 112 \quad 113$

Opgave 6

Faders alder sættes til *x* og sønnens alder til *y*. Vi får da følgende ligninger:

$$\begin{matrix} x-3=8\cdot(y-3) \\ x+21=2\cdot(y+21) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x-3=8y-24 \\ x+21=2y+42 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x-8y=-21 \\ x-2y=21 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=8y-21 \\ x=2y+21 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2y+21=8y-21 \\ x=2y+21 \end{matrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} 6y=42 \\ x=2y+21 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=7 \\ x=35 \end{matrix}$$

Faderen er i dag 35 år og sønnen er 7 år.

Opgave 7

Vi køber x haner, der hver koster 5 pengestykker, y høner, der hver koster 3 pengestykker, og z kyllinger til en enhedspris af 1/3 pengestykker.

Oplysningerne kan oversættes til:

$$\begin{matrix} x+y+z=100 \\ 5x+3y+\frac{1}{3}z=100 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x+y+z=100 \\ 15x+9y+z=300 \end{matrix}$$

Det står klart, at vi har 2 ligninger med 3 ubekendte, og derfor kan vi evt. få flere løsninger. Hvis vi ikke udelukkende skal købe haner, kan vi af den nederste ligning konkludere, at x må være mindre end 20. Ved at pusle lidt med tallene finder man desuden, at x er et tal i 4-tabellen. Det giver et begrænset antal mulige løsninger. Vi kan sætte x til forskellige værdier, og herved få 2 ligninger i de variable y og z. Disse kan så løses.

For $x=16$:

$$\begin{matrix} y+z=84 \\ 9y+z=60 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=84-y \\ 9y+84-y=60 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=84-y \\ 8y=-24 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=87 \\ y=-3 \end{matrix}$$ Dette er ikke en mulig løsning.

For $x=12$:

$$\begin{matrix} y+z=88 \\ 9y+z=120 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=88-y \\ 9y+88-y=120 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=88-y \\ 8y=32 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} z=84 \\ y=4 \end{matrix}$$ Dette er en mulig løsning.

Løsningerne, når x, y og z alle er større end 0 er:

x	4	8	12
y	18	11	4
z	78	81	84

Opgave 8

I første ligning står der: $x = y + z$. Dette er ensbetydende med $x-y-z=0$.

For at komme fra næstsidste linje til sidste linje bliver der divideret med $x-y-z$. Det er ikke tilladt, da vi herved dividerer med 0. Der kan føres mange argumenter for, at vi ikke kan tillade, at dividere med 0 på begge sider af lighedstegnet. F.eks.: $5\cdot 0=117\cdot 0 \Leftrightarrow 5=117$. Første ligning er sand, mens sidste ligning er falsk, så der er ikke regnet ensbetydende.

Opgave 9

Når det er sidelængder i en retvinklet trekant, kan vi bruge Pythagoras' sætning:

$$x^2+(x+7)^2=(x+9)^2 \Leftrightarrow x^2+x^2+14x+49=x^2+18x+81 \Leftrightarrow x^2-4x-32=0 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+128}}{2} \Leftrightarrow x=8 \vee x=-4$$

Den negative værdi kan ikke bruges. Vi får hermed sidelængderne: 8, 15 og 17

Opgave 10

Da nævnerne ikke må være 0, må vi forudsætte: $x\neq 3$ og $x\neq -3$.

$$\frac{2}{x-3}-\frac{6}{x-3}=\frac{6}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{1}{x-3}-\frac{3}{x-3}=\frac{3}{(x-3)\cdot(x+3)} \Leftrightarrow \frac{-2}{x-3}=\frac{3}{(x-3)\cdot(x+3)} \Leftrightarrow$$
$$\frac{-2\cdot(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{3}{(x-3)\cdot(x+3)} \Leftrightarrow -2\cdot(x+3)=3 \Leftrightarrow -2x-6=3 \Leftrightarrow x=-4{,}5$$

Opgave 11

Først må vi slå fast, at der alene er tale om en andengradsligning, når $a\neq 0$.

Andengradsligningen $ax^2+12x+9=0$ har diskriminanten: $12^2-4\cdot a\cdot 9=144-36a$

Der er netop én løsning for: $D=0 \Leftrightarrow 144-36a=0 \Leftrightarrow 36a=144 \Leftrightarrow a=4$.

Der er 2 løsninger for: $D>0 \Leftrightarrow 144-36a>0 \Leftrightarrow 36a<144 \Leftrightarrow a<4$.

Hvis ligningen skal have løsninger, der er hele tal, skal vi i det mindste have et kvadrattal under rodtegnet i nedenstående:

$$ax^2+12x+9=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144-4\cdot 9\cdot a}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm 6\cdot\sqrt{4-a}}{2a} \Leftrightarrow x=\frac{-6\pm 3\cdot\sqrt{4-a}}{a}$$

Vi kan helt klart bruge $a=3$, idet vi får: $x=\dfrac{-6\pm 3\cdot\sqrt{4-3}}{3} \Leftrightarrow x=-1 \vee x=-3$

Det er også den eneste løsning. Ganske vist kan $4-a$ være et kvadrattal for uendelig mange værdier af a, f.eks.: $-5,-12,-21,-32,\ldots$. Men ingen af dem giver hele tal, når vi udregner brøken, idet den numeriske værdi af tallene i tælleren hurtigt bliver meget mindre end den numeriske værdi af nævneren, og brøken bliver derfor mindre end 1.

Opgave 12

$3x^2+12x+c=0$ har 2 løsninger for: $D=12^2-4\cdot3\cdot c>0 \Leftrightarrow c<12.$ Vi får:

$$3x^2+12x+c=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144-12c}}{6}$$

$c=9$ giver løsningerne: $x=-1 \vee x=-3.$

$c=9$ er det eneste positive hele tal, der giver et kvadrattal under rodtegnet. Der er derimod negative værdier af c, der kan bruges, f.eks. $c=-15,$ der giver rødderne *1* og -*5*. Men her søgte vi alene de positive tal.

Opgave 13

Vi forsøger at løse ligningerne efter determinantmetoden:

Vi undersøger hvilke værdier af a, der giver en determinant på 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a & -2 \end{vmatrix} = -2^2-(-a)\cdot a = a^2-2^2 = (a+2)(a-2)=0 \Leftrightarrow a=-2 \vee a=2.$$

Vi ved, at der er netop ét sæt løsninger, når determinanten er forskellig fra 0, hvorimod der er ingen eller uendelig mange løsninger, når determinanten er lig med 0. Vi deler derfor op i følgende 3 tilfælde:

1. For $a\neq-2$ og $a\neq2$ får vi:

   $$x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -a \\ 2a & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a & -2 \end{vmatrix}}=\frac{-8+2a^2}{a^2-2^2}=\frac{2(a^2-4)}{a^2-4}=2 \text{ og } y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ a & 2a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -a \\ a & -2 \end{vmatrix}}=\frac{4a-4a}{a^2-4}=0$$

   $x=2 \wedge y=0$ er den eneste løsning.

2. For $a=2$ ser ligningssystemet sådan ud:

   $$\begin{matrix} 2x-2y=4 \\ 2x-2y=4 \end{matrix} \Leftrightarrow 2x-2y=4 \Leftrightarrow x-y=2 \Leftrightarrow y=x-2$$

   Her er alle punkter (alle koordinatsæt)på linjen med ligning: $y=x-2$ løsninger til ligningssystemet.

3. For $a=-2$ får vi:

$$\begin{matrix} 2x+2y=4 \\ -2x-2y=-4 \end{matrix} \Leftrightarrow 2x+2y=4 \Leftrightarrow x+y=2 \Leftrightarrow y=-x+2.$$

Her er alle punkter på linjen med ligning: $y=-x+2$ løsninger til ligningssystemet.

Opgave 14

$(x+3)^2-7(x+3)+10=0$ er en andengradsligning i den variable $x+3$. Vi sætter $y=x+3$ og får:

$$y^2-7y+10=0 \Leftrightarrow y=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2} \Leftrightarrow y=5 \vee y=2.$$

Heraf følger: $x+3=5 \vee x+3=2 \Leftrightarrow x=2 \vee x=-1.$

Forslag til løsning af ”Opgaver til talteori” (side173)

Opgave 1

$$037037037\cdot 3=111111111 \quad 037037037\cdot 6=222222222 \quad 037037037\cdot 9=333333333$$

Ved at holde styr på, hvad menten bliver, kan man sørge for at få udelukkende ens cifre.

Andre eksempler: $074074074\cdot 3=222222222 \quad 063492063492\cdot 7=444444444444$

Opgave 2

Da $123456789\cdot 9=1111111101,$ vil man få produktet $7777777707,$ hvis 7 er lykketallet.

Opgave 3

Hvis vi tænker på tallet x, får vi følgende rækkefølge:

$$x \quad 5x \quad 5x+6 \quad 4\cdot(5x+6) \quad 4\cdot(5x+6)+9 \quad 5\cdot(4\cdot(5x+6)+9) \quad 5\cdot(4\cdot(5x+6)+9)-165$$

Vi reducerer det sidste udtryk:

$$5\cdot(4\cdot(5x+6)+9)-165=5\cdot(20x+24+9)-165=100x+120+45-165=100x$$

Vi får således et resultat, der er 100 gange det tal, vi startede med.

Opgave 4

Vi prøver med cifrene: $4 \quad 7 \quad 8$. De har summen: $4+7+8=19.$

Vi danner følgende 2 -cifrede tal, som vi herefter adderer:

$47+48+78+74+84+87=418$

$418:19=22.$

Andre valg af cifre giver samme resultat: 22.

For at forklare dette, må vi generalisere. Vi vælger cifrene a, b og c.

Det 2-cifrede tal, der betegnes *ab*, er det samme som $10a+b.$ Vi får derfor:

$$(10a+b)+(10b+a)+(10a+c)+(10c+a)+(10b+c)+(10c+b)=22a+22b+22c=22\cdot(a+b+c).$$

Ved division med $a+b+c$ får vi derfor altid 22.

Opgave 5

Vi prøver lidt forskellige produkter:

$421\cdot 3=1263 \quad 321\cdot 4=1284 \quad 42\cdot 31=1302 \quad 41\cdot 32=1312$

Det ser ud til, at vi får større tal ved at multiplicere 2 2-cifrede tal frem for multiplikation af et 3- cifret med et 1- cifret.

Vi prøver at generalisere for at undersøge, om der er et mønster.

Idet vi antager, at cifrene a, b, c og d har størrelsesordenen: $a>b>c>d$, får vi:

$$1)\ (100a+10c+d)\cdot b=100ab+10bc+bd \quad 2)\ (100b+10c+d)\cdot a=100ab+10ac+ad$$
$$3)\ (10a+c)\cdot(10b+d)=100ab+10bc+10ad+cd$$
$$4)\ (10a+d)\cdot(10b+c)=100ab+10bd+10ac+cd$$

Af de 2 tal i øverste linje (dvs. 1) og 2)) er det sidste størst, da $ac>bc\wedge ad>bd.$ Vi kan også se, at det er bedre at multiplicere 2 2-cifrede tal, fordi vi får et 10-led mere, end ved produktet af et 3- cifret og et 1- cifret.

Sammenligner vi 3) med 4), er 4) størst. Da $c>d$ har vi, at $10ac>10ad$ og forskellen mellem de 2 tal er lig med: $10a\cdot(c-d)$. Da $c>d$ er $10bc>10bd$, og her er forskellen mellem de 2 tal lig med $10b\cdot(c-d)$. Men $10a\cdot(c-d)$ er større end $10b\cdot(c-d)$. Det betyder, at 4) er større end 3).

Ifølge det viste kan vi regne med, at vi får det største produkt, hvor der indgår 6 cifre ved:

$631\cdot 542=342002$

Opgave 6

Lad abc være betegnelse for et 3- cifret tal. Dvs.: $abc=100a+10b+c.$

Differenser mellem de 2 tal er derfor:

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c).$$

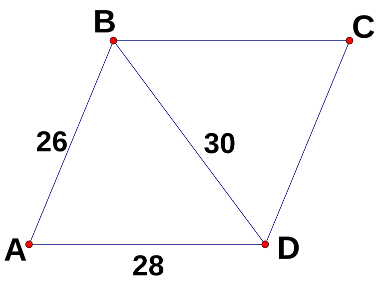
Da 9 går op i dette tal, må den reducerede tværsum blive 9.

Opgave 7

Allerede ved multiplikation af tallene mindre end 10, opdager vi, at det sidste ciffer bliver 0, idet $2 \cdot 5 = 10.$Sidste ciffer i det samlede produkt vil derfor være 0.

Forslag til løsning af "Opgaver om areal" (side296)

Opgave 1



Vi kan beregne arealet af $\triangle ABD$ ved hjælp af Heron's formel:

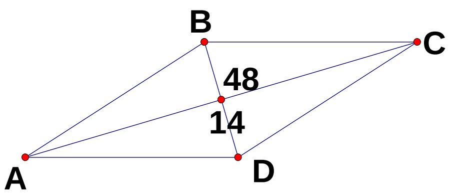
$$s = \frac{26 + 28 + 30}{2} = 42.$$

$$A(\triangle ABD) = \sqrt{42 \cdot (42 - 26) \cdot (42 - 28) \cdot (42 - 30)} = 336.$$

Parallelogrammets areal er det dobbelte af trekantens areal:

$$A(\square ABCD) = 2 \cdot 336 = 672.$$

Opgave 2

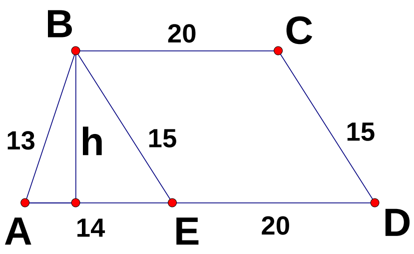


Areal af $\square ABCD$ må være: $½ \cdot 14 \cdot 48 = 336.$

Alle 4 sider er lige store, når diagonalerne står vinkelret på hinanden. Vi får:

$$|AB| = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$$

Opgave 3



Linjestykket BE er tegnet parallel med CD. Det betyder, at $\square BCDE$ er et parallelogram, hvorved sidernes længder bliver, som angivet på tegningen.

Vi kan beregne areal af $\triangle ABE$ ved hjælp af Heron´s formel:

$$s = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

$$A(\triangle ABE) = \sqrt{21 \cdot (21-13) \cdot (21-14) \cdot (21-15)} = 84$$

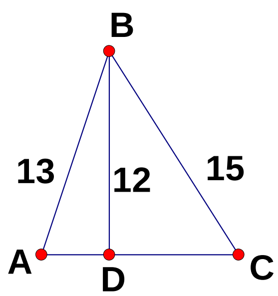
Vi kan nu beregne højden h i trekanten. Denne er samtidig trapezets højde:

$$½ \cdot h \cdot 14 = 84 \Leftrightarrow h = 12.$$

Trapezets areal kan beregnes ud fra formlen for dette eller ved addition af trekantens og parallelogrammets arealer.

$$A(\square ABCD) = ½ \cdot 12 \cdot (20+34) = 324$$

Opgave 4



$\triangle ABD$ og $\triangle BCD$ er begge retvinklede, og vi kan ved brug af Pythagoras´ sætning få:

$|AD| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$ $|DC| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9.$

$|AC| = 5 + 9 = 14.$

$A(\triangle ABC) = ½ \cdot 12 \cdot 14 = 84.$

Opgave 5

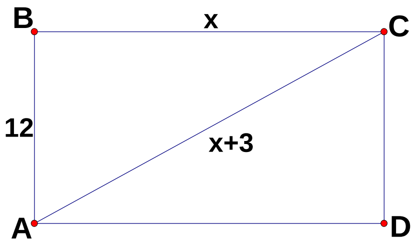
Her skal vi igen bruge Herons formel: $s = \dfrac{85 + 132 + 157}{2} = 187$

$A(\triangle ABC) = \sqrt{187 \cdot (187 - 85) \cdot (187 - 132) \cdot (187 - 157)} = 5610.$

Opgave 6

Arealet må være lig med $½ \cdot 14 \cdot 14 = 98.$

Opgave 7



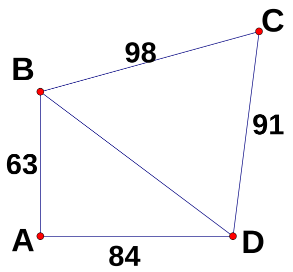
$\triangle ABC$ er en retvinklet trekant, så vi får følgende:

$12^2 + x^2 = (x + 3)^2 \Leftrightarrow 144 + x^2 = x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 6x = 135 \Leftrightarrow x = 22{,}5$

Det betyder: $|BC| = 22{,}5$ og $|\mathrm{AC}| = 22{,}5 + 3 = 25{,}5.$

Rektanglets areal: $12 \cdot 22{,}5 = 270.$

Opgave 8



$\triangle BDA$ er retvinklet, og dermed kan diagonalen BD beregnes:

$$|BD| = \sqrt{63^2 + 84^2} = 105.$$

I $\triangle BCD$ kender vi nu alle 3 sider, og vi kan bruge Herons formel til at beregne arealet.

$$2s = \frac{98 + 91 + 105}{2} = 147.$$

$$A(\triangle BCD) = \sqrt{147 \cdot (147 - 98) \cdot (147 - 91) \cdot (147 - 105)} = 4116.$$

Arealet af $\square ABCD$ er summen af de 2 trekanters arealer.

$$A(\square ABCD) = ½ \cdot 63 \cdot 84 + 4116 = 6762.$$

Trods de forholdsvis store tal fik vi igen pæne tal ved brug af Herons formel. Man skal imidlertid ikke tro, at dette altid er tilfældet. Det er absolut nøje konstruerede tal, der her er valgt.

Opgave 9

Vi sætter de 2 sidetal til henholdsvis: $3 \cdot x$ og $4 \cdot x$.

Herved bliver arealet: $3 \cdot x \cdot 4 \cdot x = 12x^2$.

Vi har da: $12x^2 = 6912 \Leftrightarrow x^2 = 576 \Leftrightarrow x = 24$ (idet kun den positive værdi kan bruges).

Rektanglets sider er da: $3 \cdot 24 = 72$ og $4 \cdot 24 = 96$.

Opgave 10

Bedet i midten har dimensionerne: $(7,5 - 2 \cdot 0,75) \times (18,75 - 2 \cdot 0,75) = 6 \times 17,25$.

Grusgangens areal må være differensen mellem havens areal og bedets areal:

$$Grusgangens\ \text{areal} = 7,5 \cdot 18,75 - 6 \cdot 17,25 = 37,125\ \text{m}^2.$$

Rumfang af gruset må ligge mellem følgende 2 tal:

$37,125 \cdot 0,04 = 1,485\ \text{m}^3$ og $37,125 \cdot 0,05 = 1,85625\ \text{m}^3$.

Der skal derfor købes $2\ \text{m}^3$.

Grusets vægt: $2 \cdot 1750 = 3500$ kg.

Traileren skal køre: $3500 : 375 = 9\frac{1}{3}$. Dvs. 10 ture.

375 kg grus har rumfanget: $\frac{375}{1750} = \frac{3}{14}\ \mathrm{m}^3$.

Vi bestemmer højden ved at dividere rumfanget med bundens areal:

$$højden = \frac{3}{14} : (2,05 \cdot 1,3) = \frac{3}{14 \cdot 2,05 \cdot 1,3} = 0,0804.$$

Gruset må altså maksimalt stå i en højde af ca. 8 cm. (Mon det bliver overholdt?).

Opgave 11

Endevæggen kan deles op i et rektangel og et trapez:

Areal af endevæggen: $2,35 \cdot 2,5 + ½ \cdot (3,25 - 2,5) \cdot (1,35 + 2,35) = 7,2625\ \mathrm{m}^2$.

For at beregne skråvæggens areal skal vi kende dens dimensioner, og her mangler vi den skrå linje på tegningen. Den er hypotenusen i en retvinklet trekant med kateterne: $3,25 - 2,5 = 0,75\ \mathrm{m}$ og $2,35 - 1,35 = 1\ \mathrm{m}$. Det giver: $\sqrt{0,75^2 + 1^2} = 1,25\ \mathrm{m}$.

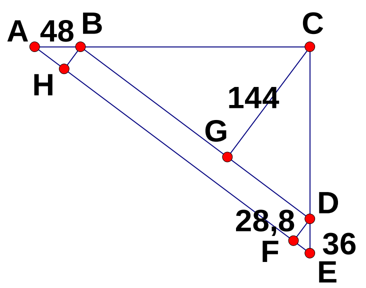
Areal af den malede flade bliver summen af 2 endevægge, væggen med skråvæg og endnu en væg. Herfra skal fratrækkes areal af vindue og dør. Det giver:

$$2 \cdot 7,2625 + 1,25 \cdot 4,25 + 1,35 \cdot 4,25 + 2,35 \cdot 4,25 - 1,23 \cdot 1,5 - 2,07 \cdot 0,9 = 31,8545\ \mathrm{m}^2.$$

En bøtte maling rækker til: $8 \cdot 2,5\ \mathrm{m}^2 = 20\ \mathrm{m}^2$.

Der skal derfor købes 2 bøtter.

Opgave 12



$\triangle DEF \sim \triangle CDG$ i forholdet: $28,8 : 144 = 1 : 5$

Desuden gælder: $\triangle ABH \sim \triangle BCG$. Også her er forholdet $1 : 5$

Heraf følger: $|CD| = 5 \cdot 36 = 180$ og $|BC| = 5 \cdot 48 = 240.$

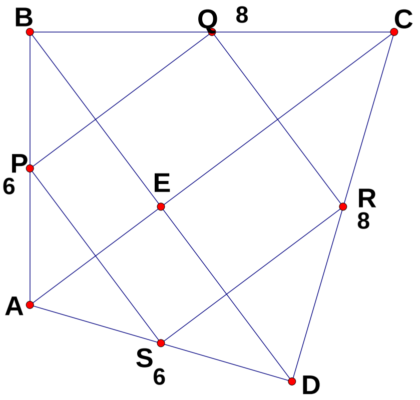
Vi kan nu beregne de 2 store trekanter areal, og vejens areal er differensen mellem disse.

$$Areal(\text{Afskåret trekant}) = Areal(\triangle BCD) = ½ \cdot 240 \cdot 180 = 21600 \text{ m}^2.$$

$$Areal(\triangle ACE) = ½ \cdot 288 \cdot 216 = 31104 \text{ m}^2.$$

$$Areal(Vej) = 31104 - 21600 = 9504 \text{ m}^2.$$

Opgave 13



Ved diagonalen AC deles $\square ABCD$ i 2 kongruente retvinklede trekanter.

$$Areal(\square ABCD) = 2 \cdot (½ \cdot 6 \cdot 8) = 48.$$

Da begge trekanter: $\triangle BCD$ og $\triangle DAB$ er ligebenede, er AC midtnormal for BD.

Derfor gælder: $BD \perp AC.$ Da $\triangle ACB$ er retvinklet, har vi: $|AC| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$

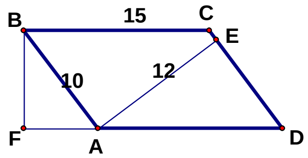
I en retvinklet trekant er produktet af kateterne lig med produktet af højde og hypotenuse (underforstået længderne af disse). Da $\triangle ACB$ er retvinklet, får vi:

$|AB| \cdot |BC| = |BE| \cdot |AC| \Leftrightarrow 6 \cdot 8 = |BE| \cdot 10 \Leftrightarrow |BE| = 4{,}8.$ Og hermed: $|BD| = 9{,}6.$

PQ er midtpunktstransversal i $\triangle ABC,$ og derfor halv så stor som AC. Tilsvarende er QR midtpunktstransversal i $\triangle BCD,$ og derfor er QR det halve af BD.

Dimensionerne i rektanglet PQRS er således: $5 \times 4{,}8.$ Det betyder, at arealet er 24, der i øvrigt er det halve af arealet af $\square ABCD.$ Dette sidste er et generelt resultat, når punkterne P, Q, R og S betegner midtpunkter af firkantens sider.

Opgave 14



$\triangle ADE$ er retvinklet. Af Pythagoras´ sætning følger:

$|ED| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ og dermed: $|CE| = 10 - 9 = 1.$

Da $\angle BAF = \angle D$ (ensliggende vinkler ved parallelle linjer) må der gælde:

$\triangle ABF \sim \triangle DAE$ i forholdet $10 : 15 = 2 : 3.$

Heraf følger: $|BF| = \dfrac{2}{3} \cdot 12 = 8$ og $|FA| = \dfrac{2}{3} \cdot 9 = 6.$

Højden fra F i $\triangle FCE$ står vinkelret på CD´s forlængelse. Men CD er parallel med BA. Derfor er højden fra F i $\triangle ABF$ en del af den søgte højden. Resten udgøres af afstanden (på 12) mellem de parallelle linjer CD og BA.

Om højden h fra F i $\triangle FCE$ gælder: $h \cdot 10 = 8 \cdot 6 \Leftrightarrow h = 4,8.$

Højden fra F i $\triangle FCE$: $4,8 + 12 = 16,8.$

Areal($\triangle FCE$)=½ $\cdot 16,8 \cdot 1 = 8,4.$

Opgave 15

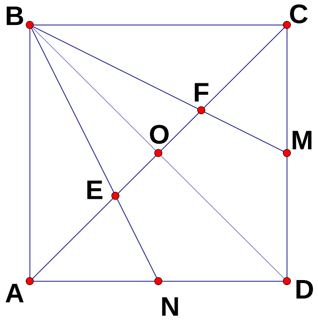
$32" = 83,52$ cm. Dette tal er hypotenusen i en retvinklet trekant, hvor kateternes forhold er $16 : 9.$

Idet vi sætter kateterne til henholdsvis $16 \cdot x$ og $9 \cdot x$, får vi:

$$(16 \cdot x)^2 + \left(9 \cdot x^2\right) = 83,52^2 \Leftrightarrow 256x^2 + 81x^2 = 6975,5904 \Leftrightarrow 337x^2 = 6975,5904 \Leftrightarrow x = ca.4,55.$$

Skærmens dimension bliver ca.: $4,55 \cdot 16 \times 4,55 \cdot 9 = 72,8$ cm $\times\, 40,95$ cm.

Opgave 16



$\triangle \mathrm{ABC}$ bliver delt i 3 trekanter med samme areal, idet de har samme højde (på AC) og samme grundlinje.

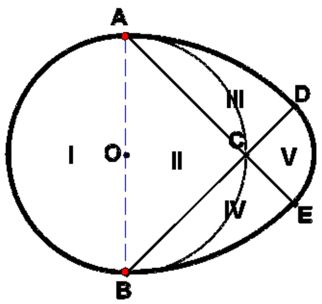
De har derfor hver et areal på $\frac{1}{6}$ af kvadratets areal.

$\triangle AEN \cong \triangle CFM$ har et areal på: $Areal(\triangle ABN) - Areal\left(\triangle ABE\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}.$

Arealet af femkanten $NEFMD$ er lig med: $\frac{1}{2} - \frac{2}{12} = \frac{1}{3}.$

Forslag til løsning af ”Opgaver til cirklen og vinkler ved cirklen” (side 299)

Opgave 1



$\triangle ABC$ er ligebenet og retvinklet. Da $|AB| = |AD| = 2,$ får vi: $|BC| = |AC| = \sqrt{2}$ og $|CD| = 2 - \sqrt{2}.$

Vi kan nu beregne areal af de på tegningen opdelte områder:

$$Areal(område\ I) = ½ \cdot 1^2 \cdot \pi = ½ \cdot \pi$$

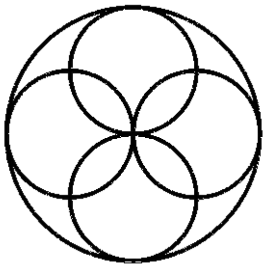
$$Areal(område\ II) = ½ \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1 \quad Areal(område\ III) = \frac{1}{8} \cdot 2^2 \cdot \pi - 1 = ½\pi - 1$$

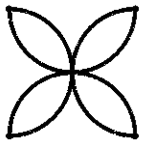
$$Areal(\text{område } V) = \frac{1}{4}\cdot(2-\sqrt{2})^2\cdot\pi = \frac{1}{4}\cdot(4+2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2})\cdot\pi = \frac{3}{2}\cdot\pi-\sqrt{2}\cdot\pi$$

$$Areal(\text{ægget}) = ½\cdot\pi+1+2\cdot(½\cdot\pi-1)+1½\cdot\pi-\sqrt{2}\cdot\pi = 3\cdot\pi-\sqrt{2}\cdot\pi-1 = 3{,}9819$$

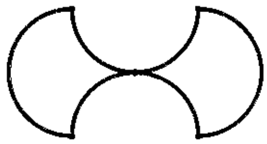
$$Omkreds(\text{ægget}) = ½\cdot 2\cdot\pi+\frac{1}{4}\cdot 4\cdot\pi+\frac{1}{4}\cdot(2\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)\cdot\pi = 2\cdot\pi+\frac{1}{4}\cdot(4\cdot\pi-2\sqrt{2}\cdot\pi) = 3\cdot\pi-½\cdot\sqrt{2}\cdot\pi = 7{,}2033$$

Opgave 2

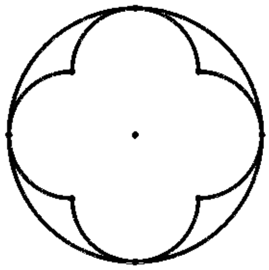




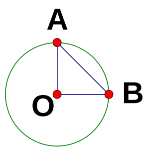
Figur 1



Figur 2



Figur 3



Figur 4

Af figur 4 ses, at afsnittet, som korden AB afskæreraf cirklen, er lig en kvart cirkel minus areal af $\triangle OAB$. Det giver: $\frac{\pi}{4}-½\cdot 1\cdot 1 = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

Figur 1 består af 8 sådanne afsnit: $Areal(Figur1) = 8\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\pi-4 = 2{,}28318$.

Areal et af figur 2 er lig med arealet af 2 cirkler minus arealet af figur 1:

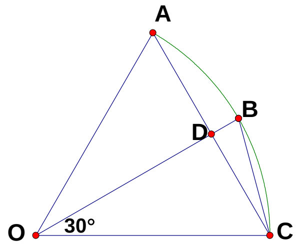
$$Areal(figur2) = 2\cdot\pi-(2\cdot\pi-4) = 4.$$

Arealet af figur 3 er den store cirkels areal minus 2 gange arealet af figur2 minus arealet af figur 1:

$$Areal(figur3) = 2^2\cdot\pi-2\cdot 4-\left(2\cdot\pi-4\right) = 2\cdot\pi-4 = 2{,}28318$$

Opgave 3

Areal af et udsnit på $30°$ er lig med: $\frac{30}{360}\cdot 5^2\cdot\pi = 6{,}545\ \text{cm}^2$.



Arealet af det afsnit, som korden BC afskærer, er lig med udsnittet areal minus areal af $\triangle OBC$.

$\triangle OBC$ har højden: $|DC| = ½ \cdot |AC| = ½ \cdot r = ½ \cdot 5 = 2,5$ cm. Hermed har vi:

$Areal(\triangle OBC) = ½ \cdot 2,5 \cdot 5 = 6,25$ cm^2.

$Areal(afsnit) = 6,545 - 6,25 = 0,295$ cm^2.

Opgave 4

Sættes gradtallet for buerne BD, DC og AD til henholdsvis x, y og z, får vi ligningerne:

$$\begin{matrix} 235 + x + z = 360 & & 5 + z - y = 0 & & 5 + (105 - y) - y = 0 & & y = 55 & & y = 55 \\ 230 + x + y = 360 & \Leftrightarrow & 230 + x + y = 360 & \Leftrightarrow & x + y = 130 & \Leftrightarrow & x + 55 = 130 & \Leftrightarrow & x = 75 \\ 255 + y + z = 360 & & y + z = 105 & & z = 105 - y & & z = 50 & & z = 50 \end{matrix}$$

Først har vi subtraheret ligningerne i 1. og 2. linje, resten er reduktion og indsættelse.

$\angle O_1 = ½ \cdot 50 + ½ \cdot 55 = 52,5°$ $\angle O_2 = ½ \cdot 50 + ½ \cdot 75 = 62,5°$ $\angle O_3 = ½ \cdot 75 + ½ \cdot 55 = 65°$

Bemærk at vinkelsummen bliver $180°$.

Opgave 5

Hver af vinklerne i 5-tak-stjernen spænder over en bue på $360° : 5 = 72°$. Da de er periferivinkler, er deres gradtal det halve af buens gradtal. Dvs. at alle vinklerne er $36°$. Summen er derfor $180°$.

Hver af "takkerne" er ligebenede trekanter, hvor vinklerne ved grundlinjen er $\dfrac{180 - 36}{2} = 72°$

Vinklen i den regulære femkant i stjernens midte er derfor: $180 - 72 = 108°$ (sådan som vinklen netop skal være i en regulær femkant).

Opgave 6

$\angle ABE$ er en periferivinkel, og buen den spænder over er derfor dobbelt så stor som vinklen.

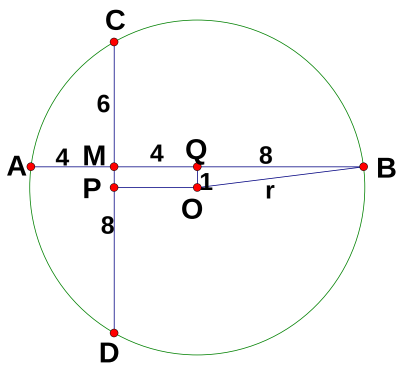
Dvs. Bue $AE = 2 \cdot 48 = 96°$.

Hvis vi sætter gradtallet for bue DB til x, får vi fra formlen for gradtallet til en indre vinkel:

$\angle AFE = 80° \Leftrightarrow \dfrac{96° + x}{2} = 80° \Leftrightarrow x = 64°.$

Af formlen for gradtallet til en ydre vinkel følger: $\angle C = \dfrac{bueAE - bueBD}{2} = \dfrac{96° - 64°}{2} = 16°.$

Opgave 7



Fra det tænkte centrum O i cirklen tegnes linjestykkerne OQ og OP vinkelret på korderne AB og CD.

Punkterne Q og P bliver herved midtpunkter for korderne AB og CD.

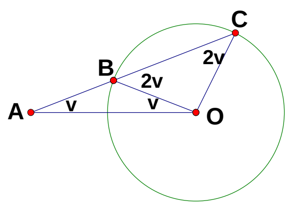
Heraf følger: $|QB| = \dfrac{4+12}{2} = 8$ og $|MQ| = 8 - 4 = 4.$

Desuden: $|PC| = \dfrac{6+8}{2} = 7$ og $|PM| = 7 - 6 = 1.$

$\square PMQO$ er et rektangel med siderne 1 og 4. Vi kan nu beregne radius af den retvinklede $\triangle OBQ$:

$radius = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}.$

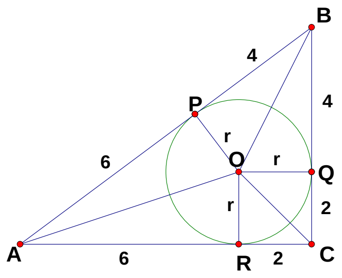
Opgave 8



Da $\triangle ABO$ er ligebenet, får vi: $\angle AOB = v.$ $\angle OBC$ er nabovinkel til vinkel B, og derfor lig med 2v. Også $\triangle BOC$ er ligebenet, da 2 af siderne er radier. Derfor er også vinkel C lig med 2v. $\angle BOC$ må derfor være lig med: $180° - 4v.$

Vi har hermed: $\angle OBC = \angle OCB = 2v$ og $\angle BOC = 180° - 4v.$

Opgave 9



Der må gælde: $|AP| = |AR| = 6 \quad |BP| = |BQ| = 4 \quad |CR| = |CQ| = 2$

Vi får derfor sidelængderne: $a = 4 + 2 = 6 \quad b = 6 + 2 = 8 \quad c = 6 + 4 = 10$.

Trekanten bliver retvinklet, idet: $8^2 + 6^2 = 10^2$.

Derfor bliver opgaven lidt for nem, idet $\square OQCR$ bliver et kvadrat, og dermed er radius lig med 2.

Hvis den ikke var retvinklet, kunne vi bestemme trekantens areal ved Herons formel og sammenholde dette med, at arealet også kan bestemmes ved $r \cdot s$, hvor s er trekantens halve perimeter.

Forslag til løsning af "Opgaver til rumlige figurer" (side301)

Opgave 1

Kassens indre mål: $32{,}6 \times 23{,}6 \times 19{,}3$. Alle mål i cm.

Kassens indre rumfang: $32{,}6 \cdot 23{,}6 \cdot 19{,}3 = 14848{,}648 \text{ cm}^3$.

Træets rumfang er ydre rumfang minus indre rumfang: $34 \cdot 25 \cdot 20 - 14848{,}648 = 2151{,}352 \text{ cm}^3$.

Træet vejer: $2151{,}352 \cdot 0{,}7 = 1505{,}946$ g.

7,56 kg jord har rumfanget: $\frac{7560}{2{,}4} \text{ cm}^3 = 3150 \text{ cm}^3$.

Kassens kan yderligere rumme: $14848{,}648 - 3150 = 11698{,}648 \text{ cm}^3$.

Opgave 2

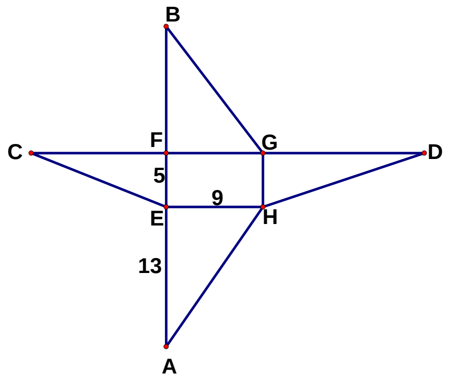
Det er en ret pyramide, så højdens fodpunkt er midt på den rektangulære grundflade.

Højden h kan beregnes, idet den er katete i en retvinklet trekant, hvis anden katete er halvdelen af siden: $½ \cdot 40 = 20$ og hypotenusen er højden i trekanten. Den er givet til at være 25. Vi får:

$h = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

Pyramidens rumfang: $\frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 16 \cdot 40 = 3200.$

Opgave 3



$|CE| = |EA| = 13$ $\triangle ECF$ er en retvinklet trekant og derfor gælder: $|CF| = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

$|BF| = |CF| = 12$ og da $\triangle BGF$ er retvinklet, får vi: $|BG| = \sqrt{12^2 + 9^2} = 15.$

Desuden gælder: $|GD| = |BG| = 15.$

Da CF er pyramidens højde, får vi:

Pyramidens rumfang: $= \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 5 \cdot 9 = 180$

Overfladen består af 4 retvinklede trekanter, hvis kateter vi kender, samt grundfladen.

Overfladens areal: $(½ \cdot 13 \cdot 9) + (½ \cdot 12 \cdot 5) + ½ \cdot 12 \cdot 9 + ½ \cdot 15 \cdot 5 + 5 \cdot 9 = 225.$

Opgave 4

Cylinderens rumfang: $4^4 \cdot \pi \cdot 18 = 288\pi = 904{,}779 \text{ cm}^3.$

Cylinderens overflade: $2 \cdot 4^2 \cdot \pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 18 = 176\pi = 552{,}92 \text{ cm}^2.$

Bemærk, at det somme tider kan være en fordel at regne videre med et udtryk, hvori π indgår.

Hullets rumfang må også være det halve af cylinderens rumfang:

Hullets rumfang= $½ \cdot 288 \cdot \pi = 144 \cdot \pi = 452{,}389 \text{ cm}^3.$

Areal af hullets tværsnitcirkel: $144\pi : 18 = 8\pi = 452,389 : 18 = 25,1327$ cm^2

Hullets radius$= \sqrt{\dfrac{8\pi}{\pi}} = \sqrt{8} = 2,8284$ cm.

Det giver en tykkelse af skallen på: $4 - 2,8284 = 1,1716$ cm

Opgave 5

Når forholdet mellem spidsens højde og stubbens højde er som $1:3$, vil forholdet mellem spidsens højde og hele pyramidens højde være $1:4$. Der er derfor også et lineært forhold mellem dimensionerne i snittet og grundfladens dimensioner på $1:4$. Snittets dimensioner bliver da: $24 \times 22,5$.

Snittets areal $= 24 \cdot 22,5 = 540$ cm^2.

Hele pyramidens rumfang $= \dfrac{1}{3} \cdot 80 \cdot 96 \cdot 90 = 230400$ cm^3.

Spidsens rumfang $= \dfrac{1}{3} \cdot 20 \cdot 540 = 3600$ cm^3.

Differensen mellem disse tal er stubbens rumfang $= 230400 - 3600 = 226800$ cm^3.

Opgave 6

Vi er nødt til at se på forholdet mellem keglespidsens rumfang og hele keglens rumfang for at opnå ligedannede legemer. Dette forhold må være: $27 : (485 + 27) = 27 : 512$.

Keglespidsens rumfang $= \dfrac{27}{512} \cdot 1536 = 81$ cm^3.

Vi ved, at hvis det lineære forhold er $n : m$, så er arealforholdet: $n^2 : m^2$ og rumfangsforholdet: $n^3 : m^3$. Heldigvis er tallene kubiktal, idet: $27 = 3^3$ og $512 = 8^3$. Det betyder, at det lineære forhold mellem keglespids og hele keglen er $3:8$.

Forholdet mellem keglespidsens højde og hele keglens højde er således også: $3:8$. og dermed:

Forholdet mellem højderne i keglespids og keglestub er $3:5$.

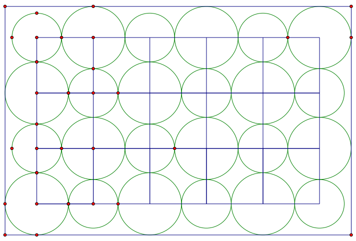
Opgave 7

Honningens rumfang i cylinderen: $3,5^2 \cdot \pi \cdot 7,8 \cdot 0,95 = 285,17$ cm^3 $=$ ca.$2,8$ dl.

Honningens rumfang i keglestubben (idet vi bruger formlen for keglestubbens rumfang):

$$\frac{1}{3} \cdot 7,8 \cdot \pi \cdot \left(4,6^2 + 3,9^2 + 4,6 \cdot 3,9\right) \cdot 0,95 = 421,431 \text{ cm}^3 = ca.4,2 \text{ dl.}$$

En mulig løsning kunne være at lægge bægrene skiftevis med bunden op eller ned i 4 rækker med 6 i hver som vist på tegningen, hvor forbindelseslinjer mellem centrene danner kvadrater:



Højden af æsken skal ved denne løsning mindst være 7,8 og bundens dimensioner skal mindst være:

$$(3\cdot 9,2+3\cdot 7,8+(4,6-3,9))\times(2\cdot 9,2+2\cdot 7,8+(4,6-3,9))=51,7\text{ cm}\times 34,7\text{ cm}$$

Vi adderer forskellen mellem de 2 cirkler radier, fordi den sidste lille cirkel ikke når ud til æskens kant.

Hvis bægrene ikke må stå med bunden opad kunne man lave 3 rækker med 8 bægre i hver, hvor bægrene er skubbet sammen, så forbindelses linjen mellem centrene danner en ligesidet trekant med siden 9,2 cm.

Opgave 8

Den dybe del af bassinet har en sideflade (tværsnit), der er et trapez med de parallelle sider: $8\ m$ og $(25-13)$ m og en højde på $3,3-1,1=2,2$ m.

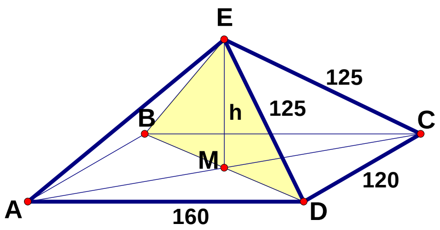
Rumfanget af denne del af bassinet: $½\cdot 2,2\cdot(8+12)\cdot 10=220\text{ m}^3$.

Vandets rumfang i den øverste del af bassinet: $25\cdot 10\cdot(1,1-0,3)=200\text{ m}^3$.

Vandets rumfang i alt: $220+200=420\text{ m}^3$.

Tid til rensning af bassinet: $420:175=2,4\text{ timer}=2\text{ timer }24\text{ min.}$

Opgave 9



Længden af diagonalen BD kan bestemmes af den retvinklede trekant BDA:

$|BD|=\sqrt{160^2+120^2}=200.$ Dvs.: $|MD|=100.$

Pyramidens højde h kan bestemmes i den retvinklede trekant EDM : $\sqrt{125^2-100^2}=75$.

Pyramidens rumfang: $\frac{1}{3}\cdot 75\cdot 160\cdot 120=480000$.

Forslag til løsning af "Opgaver til trigonometri og landmåling" (side304)

Opgave 1

Kaldes vinklen v har vi: $\tan v=\frac{3}{8}\Leftrightarrow v=20,56°$.

Opgave 2

De 2 trekanter er ligedannede, så hvis flagstangens længde sættes til x, får vi følgende forhold mellem ensliggende sider: $\frac{68}{476}=\frac{165}{x}\Leftrightarrow x=\frac{476\cdot 165}{68}=1155\text{ cm}=11,55\text{ m}$.

Opgave 3

Sinusrelationen brugt i $\triangle AED$ giver:

$$\frac{|AE|}{\sin(D)}=\frac{|AD|}{\sin(E)}\Leftrightarrow\frac{4,7}{\sin(D)}=\frac{10,45}{\sin 115}\Leftrightarrow\sin(D)=\frac{4,7\cdot\sin 115}{10,45}=0,4076\Leftrightarrow\angle EDA=24,06°.$$

Heraf følger: $\angle EAD=180°-24,06°-115°=40,94°$. Igen kan vi bruge sinusrelationen:

$$\frac{|ED|}{\sin 40,94}=\frac{10,45}{\sin 115}\Leftrightarrow|ED|=\frac{10,45\cdot\sin 40,94}{\sin 115}=7,56.$$

Da M er midtpunkt, har vi: $|AM|=5,225$.

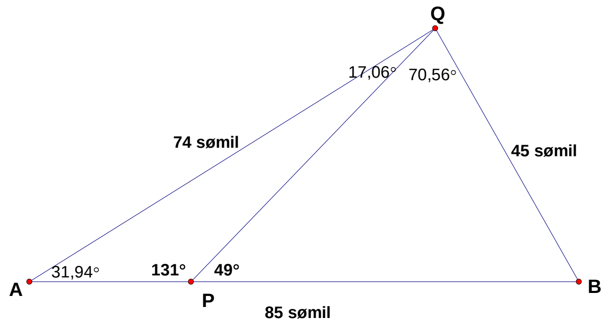
$|EM|$ kan nu bestemmes ved cosinusrelationen:

$$|EM|^2=4,7^2+5,225^2-2\cdot 4,7\cdot 5,225\cdot\cos 40,94=12,29\Leftrightarrow|EM|=3,51.$$

I den retvinklede trekant AEB, får vi: $\sin(90-40,94)=\frac{|BE|}{4,7}\Leftrightarrow|BE|=\sin(49,06)\cdot 4,7=3,55$.

Heraf $|EC|=10,45-3,55=6,9$.

Opgave 4



I $\triangle AQB$ kendes alle 3 sider. Vi kan beregne vinklerne ved hjælp af cosinusrelationen:

$$\cos A = \frac{74^2 + 85^2 - 45^2}{2 \cdot 74 \cdot 85} = 0,8486 \Leftrightarrow \angle A = 31,94°$$
$$\cos Q = \frac{74^2 + 45^2 - 85^2}{2 \cdot 74 \cdot 45} = 0,0414 \Leftrightarrow \angle Q = 87,62°$$

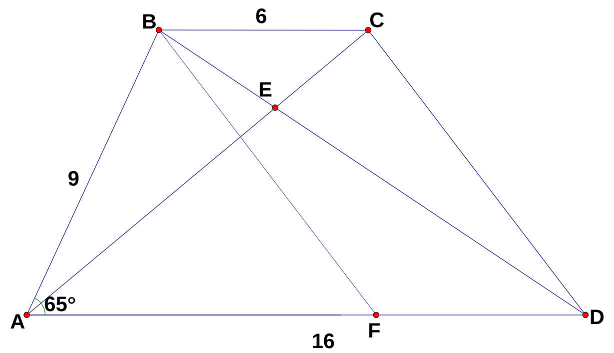
Vi får desuden:

$\angle APQ = 180° - 49° = 131°$ og $\angle AQP = 180° - 131° - 31,94° = 17,06°$ og $\angle PQB = 87,62° - 17,06° = 70,56°$

Af $\triangle PQB$ kan vi nu beregne $|PB|$ ved hjælp af sinusrelationen:

$$\frac{|PB|}{\sin 70,56} = \frac{45}{\sin 49} \Leftrightarrow |PB| = \frac{\sin 70,56 \cdot 45}{\sin 49} = 56,22 \text{ sømil}$$

Opgave 5



Linjestykket BF tegnes parallelt med CD. Vi får derfor:
$|BF| = |CD|$ og $|FD| = |BC| = 6$ og hermed: $|\mathrm{AF}| = 16 - 6 = 10.$

$|BF|$ kan beregnes ved brug af cosinusrelationen i $\triangle ABF$.

$$|BF|^2 = 9^2 + 10^2 - 2 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \cos(65) \Leftrightarrow |BF|^2 = 104,93 \Leftrightarrow |BF| = 10,24$$

Vi har derfor også: $|CD| = 10,24.$

$\angle ABC = 180° - 65° = 115°.$ Og hermed kan vi beregne AC ved cosinusrelationen på $\triangle ABC.$:

$$|AC|^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos(115) \Leftrightarrow |AC|^2 = 162,64 \Leftrightarrow |AC| = 12,75.$$

I $\triangle ACD$ kender vi alle 3 sider, og vinklen D kan beregnes ved brug af cosinusrelationen:

$$Cos(D) = \frac{16^2 + 10,24^2 - 12,75^2}{2 \cdot 16 \cdot 10,24} = 0,6051 \Leftrightarrow \angle D = 52,76°$$

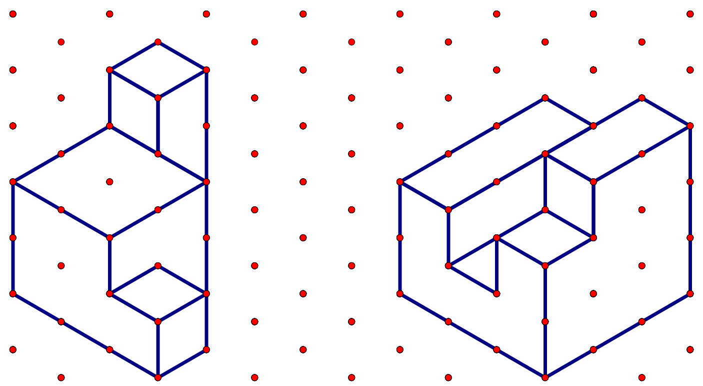
Heraf følger: $\angle C = 180° - 52,76° = 127,24°.$

Da BC er parallel med AD, gælder: $\triangle BEC \sim \triangle DEA$ i forholdet $6 : 16 = 3 : 8$

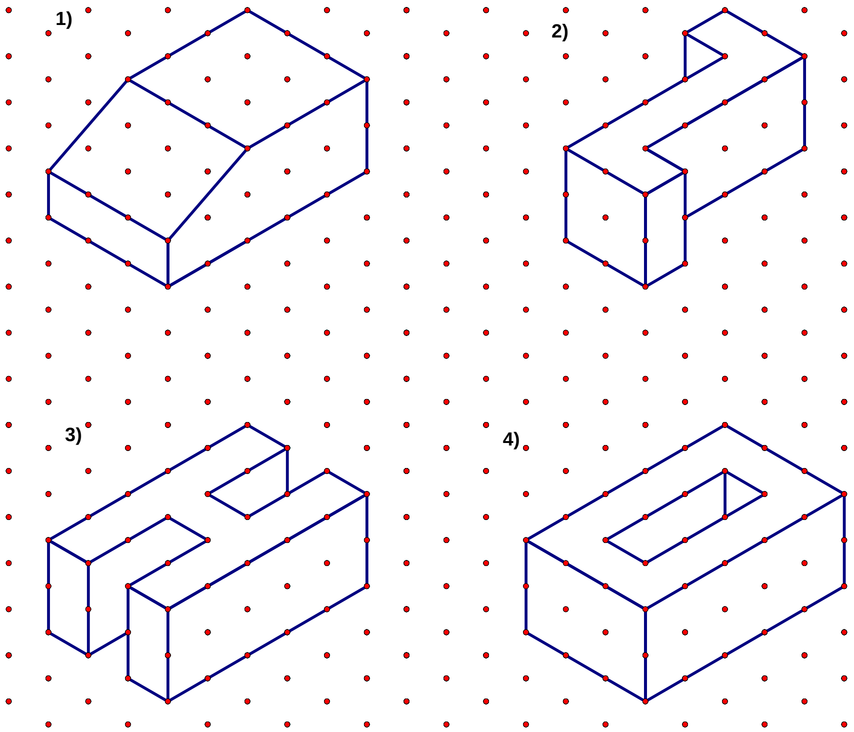
$$|AE| = \frac{8}{11} \cdot |AC| = 9,275.$$

Forslag til løsning af "Opgaver til geometrisk tegning" (side305)

Opgave 1



Opgave 2



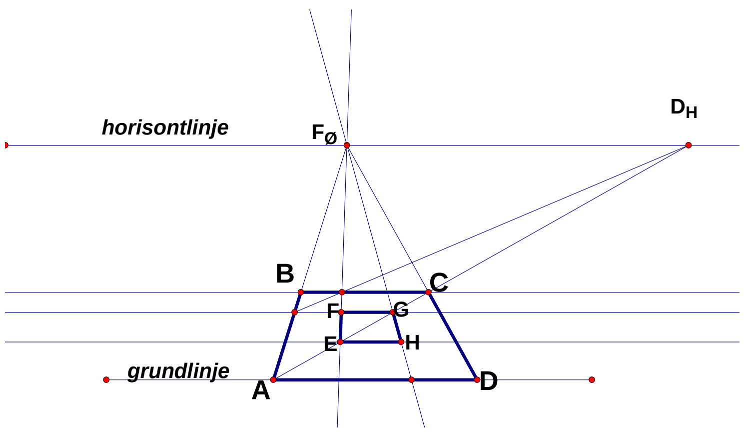
B-figuren svarende til 1) skal have en vandret fuldt optrukket midterlinje.

B-figuren svarende til 2) er ved 2 lodrette linje (den ene fuldt optrukket og den anden stiplet) opdelt i 3 lige store felter.

B-figuren svarende til 3) er ved 2 fuldt optrukne lodrette linjer delt i 3 lige store felter.

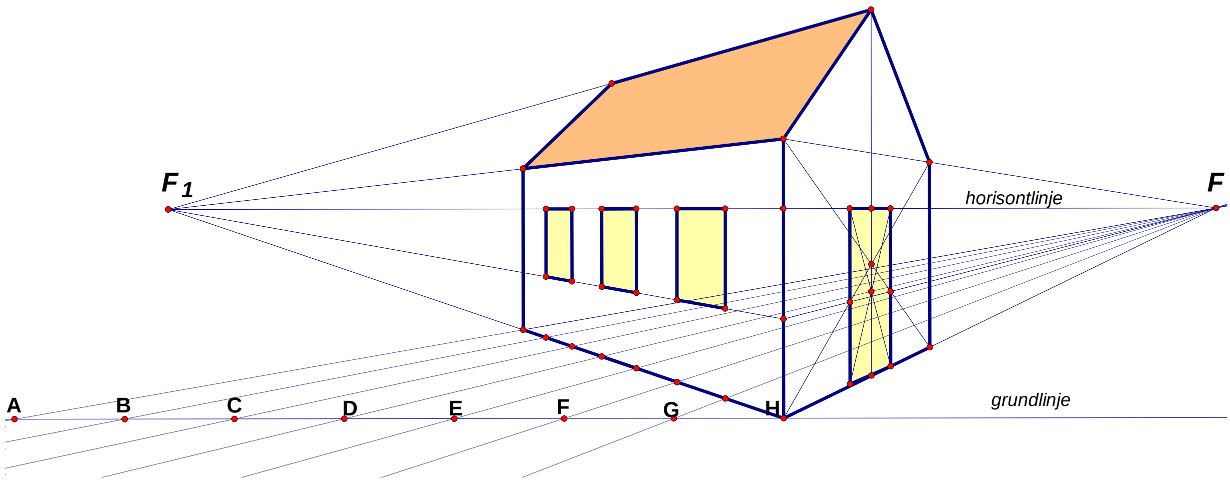
B-figuren svarende til 4) er ved 2 stiplede lodrette linjer delt i 3 lige store felter.

Opgave 3



Linjerne gennem $F_Ø$ giver parallelle linjer. Linjerne gennem distancepunktet D_H sikrer, at bedets hjørner bliver kvadrater, og dermed bliver bedet af samme bredde hele vejen rundt.

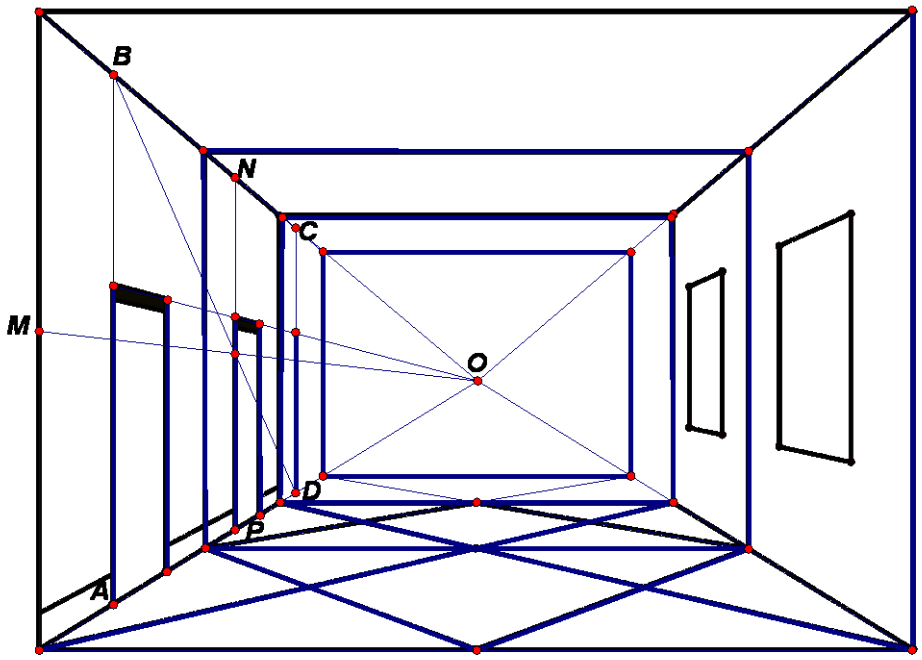
Opgave 4



Da punkterne A, B, C, D, E, F, G og H er afsat sådan, at de afskærer 7 lige store stykker på grundlinjen, deler de også husets sokkel i 7 lige store dele. Lodrette linjer (der her er skjult) gennem disse punkter sikrer, at vinduerne dels er lige brede, dels har samme mellemrum. Linjerne til forsvindingspunktet F_1 sikrer at vinduerne har samme højde.

Døren er midt på gavlen, da skæringspunkterne for henholdsvis gavlens og dørens diagonaler ligger på den lodrette midterlinje.

Opgave 5



Forsvindingspunktet bestemmes ved at forlænge de viste linjer ved gulv og loft. Næste sektion kan nu bestemmes ved at konstruere skæringspunkter mellem disse linjer og linjer, man får ved at forlænge linjerne i gulvets mønster.

Vi kan nu ved diagonalteknikken bestemme, hvor dørens linjer i den nye sektion skal gå, idet NP er den lodrette midtpunktslinjen i rektanglet ABCD. Her er alene vist konstruktion af dørens første lodrette linje, der er en del af linjestykket CD. Den her viste tegning bliver for gnidret, hvis hele døren skal tegnes. Bemærk at M er midtpunkt af rummets højde og MO er derfor en vandret midtpunktslinje.

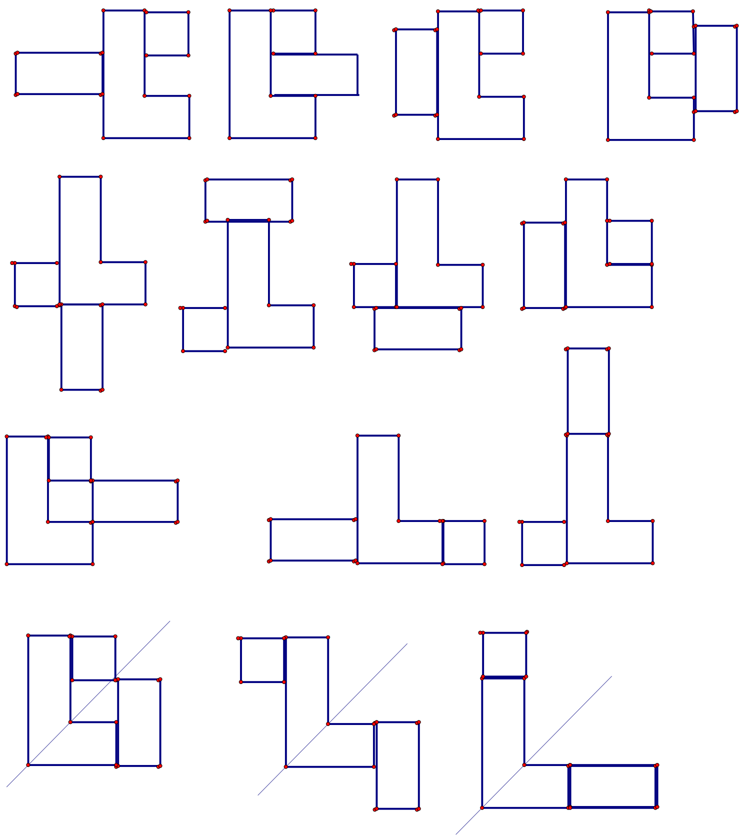
Opgave 7

Diagonalen i legemets grundflade går gennem distancepunktet og de 2 modstående sider er parallelle, fordi deres forlængelse går gennem forsvindingspunktet. Det betyder, at grundfladen er et kvadrat, hvis sider er 4, idet de 2 linjer gennem distancepunktet afskærer 4 enheder på grundlinjen, og det gør linjerne gennem forsvindingspunktet også. Også legemets højde er 4, idet de 2 linjer, der afgrænser den, går gennem forsvindingspunktet og afskærer 4 enheder på den lodrette grundlinje. Derfor er det en terning, der ligger 4 enheder inde i billedet.

Forslag til løsning af "Blandede opgaver" (side307)

Opgave 1

Der er utrolig mange forskellige løsninger. Her er nogle af dem:



Nogle af figurerne har vandrette og nogle lodrette symmetriakser, mens de 3 nederste har en skrå symmetriakse. Det er muligt, at der er flere figurer.

Opgave 2

Vi ved, at vinkelsummen i en $n-kant$ er $(n-2)\cdot 180°$. Det betyder, at vinklen i en regulær $n-kant$ er lig med: $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$. Vi får derfor:

$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}=144 \Leftrightarrow 180n-360=144n \Leftrightarrow 36n=360 \Leftrightarrow n=10.$$
$$\frac{(n-2)\cdot 180}{n}=172 \Leftrightarrow 180n-360=172n \Leftrightarrow 8n=360 \Leftrightarrow n=45.$$

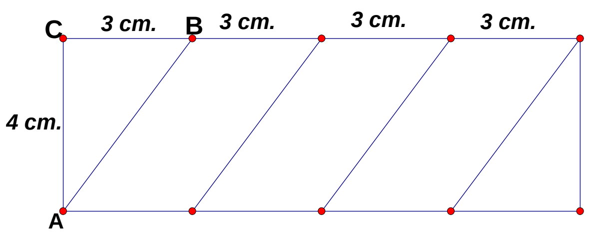
Opgave 3

Idet vi går ud fra, at den resterende stamme stadig står lodret, får vi en retvinklet trekant med siderne: $x,\ 0{,}8$ og $(2-x)$, hvor x og 0,8 m er kateternes længde, når x angiver højden af det knækkede bambustræ. Det giver følgende ligning:

$$x^2+0{,}8^2=(2-x)^2 \Leftrightarrow x^2+0{,}64=4+x^2-4x \Leftrightarrow 4x=3{,}36 \Leftrightarrow x=0{,}84.$$

Opgave 4

Vi ved, at udfoldningen af en cylinders krumme overflade er et rektangel. Her med dimensionerne: $4\ cm.\times 12\ cm.$ Idet vi forestiller os, at snoren er limet fast til røret, vil snoren svare til de 4 skrå linjestykker på tegningen.

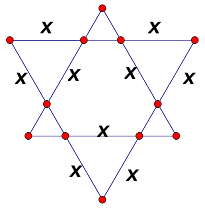


Af den retvinklede trekant ABC får vi ved brug af Pythagoras: $|AB|^2=4^2+3^2 \Leftrightarrow |AB|=5$ cm.

Snorens længde bliver derfor: $4\cdot 5$ cm. $=20$ cm.

Opgave 5

Siden i den store trekant må være 5 og siden i den lille trekant må være 4. Stjernens takker er også ligesidede trekanter, og kalder vi siden i den største af dem for x, bliver siden i den mindste af trekanterne $5-2x$. Vi kan opstille følgende ligning: $4-2\cdot(5-2x)=x \Leftrightarrow 4-10+4x=x \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$.



Omkredsen af sekskanten i midten bliver: $3x+3\cdot(5-2x)=3x+15-6x=15-3x=15-3\cdot 2=9$.

Forslag til løsning af ”Opgaver til analytisk geometri” (side 338)

Opgave 1

Linjerne har ligningerne:

$a: y=-2x+9$

$b: -x+2y-3=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

$c: x+3y+8=0 \Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3}$

Der må gælde: $a \perp b$, da $(-2)\cdot\frac{1}{2}=-1$. Det betyder, at $\angle C=90°$.

Skæringspunkt mellem a og b:

$$\begin{matrix} y=-2x+9 \\ -x+2y-3=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2x+9 \\ -x+2\cdot(-2x+9)-3=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2x+9 \\ -5x=-15 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2\cdot 3+9=3 \\ x=3 \end{matrix}$$

Dvs.: Punktet $C(3,3)$.

Skæringspunkt mellem b og c:

$$\begin{matrix} y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3} \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \frac{3}{6}x+\frac{9}{6}=-\frac{2}{6}x-\frac{16}{6} \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} 3x+9=-2x-16 \\ y=-\frac{1}{3}x-\frac{8}{3} \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=-5 \\ y=-1 \end{matrix}$$

Dvs.: Punktet $A(-5,-1)$.

Skæringspunkt mellem a og c:

$$\begin{matrix} y=-2x+9 \\ x+3y+8=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2x+9 \\ x+3(-2x+9)+8=0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2x+9 \\ -5x=-35 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} y=-2\cdot 7+9=-5 \\ x=7 \end{matrix}$$

Dvs.: Punktet $B(7,-5)$.

Sidelængderne kan nu beregnes:

$$|AC| = \sqrt{\left(3-(-5)\right)^2 + \left(3-(-1)\right)^2} = \sqrt{80} \qquad |AB| = \sqrt{\left(7-(-5)\right)^2 + \left((-5)-(-1)\right)^2} = \sqrt{160}$$
$$|BC| = \sqrt{(7-3)^2 + (-5-3)^2} = \sqrt{80}$$

Trekanten er ligebenet og retvinklet.

$$Areal(\triangle ABC) = ½ \cdot \sqrt{80} \cdot \sqrt{80} = 40.$$

Opgave 2

Vi kan benytte formlen for afstanden fra et punkt til en linje (side 327):

$$|Pl| = \frac{|y_0 - ax_0 - b|}{\sqrt{1+a^2}} = \frac{\left|2 - \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot 3 - 3\right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{8+9-12}{4}\right|}{\sqrt{\frac{16+9}{16}}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = 1.$$

Opgave 3

Det må være ligningen for midtnormalen til linjestykket AB.

Midtpunkt M af AB: $M = \left(\frac{0+12}{2}, \frac{8+0}{2}\right) = (6,4)$.

Linjen gennem A og B har hældningskoefficienten: $a = \frac{8-0}{0-12} = -\frac{2}{3}$.

Midtnormalen, der står vinkelret på linjen gennem A og B, har hældningskoefficienten: $\frac{3}{2}$.

Linjen gennem punktet $(6,4)$ med hældningen: $\frac{3}{2}$ har ligningen (se side 324):

$$y = \frac{3}{2} \cdot (x-6) + 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 9 + 4 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 5.$$

Opgave 4

Vi beregner sidernes længde:

$$|AB| = \sqrt{(4-4)^2 + (13-3)^2} = 10 \qquad |AC| = \sqrt{(12-4)^2 + (9-3)^2} = 10$$
$$|BC| = \sqrt{(12-4)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Trekanten er således ligebenet.

Cirklen med centrum i $O(a,b)$ og radius r går gennem de 3 punkter, og det giver følgende ligninger:

$$1)\ (4-a)^2 + (3-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow 14 + a^2 - 8a + 9 + b^2 - 6b = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a + b^2 - 6b + 25 = r^2$$
$$2)\ (4-a)^2 + (13-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow 16 + a^2 - 8a + 169 + b^2 - 26b = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 8a + b^2 - 26b + 185 = r^2$$
$$3)\ (12-a)^2 + (9-b)^2 = r^2 \Leftrightarrow 144 + a^2 - 24a + 81 + b^2 - 18b = r^2 \Leftrightarrow a^2 - 24a + b^2 - 18b + 225 = r^2$$

Ligningernes venstre side sættes lig hinanden:

Ligning 1) og 2): $a^2 - 8a + b^2 - 6b + 25 = a^2 - 8a + b^2 - 26b + 185 \Leftrightarrow 20b = 160 \Leftrightarrow b = 8$

Ligning 2) og 3):
$$a^2 - 8a + b^2 - 26b + 185 = a^2 - 24a + b^2 - 18b + 225 \Leftrightarrow 16a - 8b = 40 \Leftrightarrow 2a - b = 5$$

$b = 8$ indsat i $2a - b = 5$ giver: $2a - 8 = 5 \Leftrightarrow a = 6,5$

Nu kan radius beregnes af f.eks. ligning 1):

$$6,5^2 - 8 \cdot 6,5 + 8^2 - 6 \cdot 8 + 25 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 31,25 = \frac{125}{4} \Leftrightarrow r = \frac{5\sqrt{5}}{2} = 5,59$$

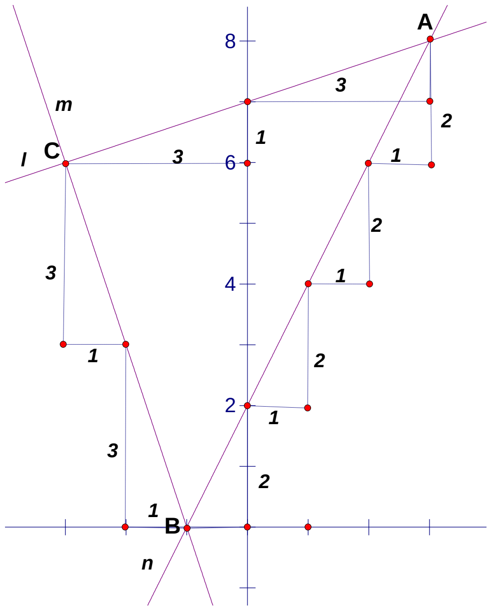
Cirklens ligning: $(x - 6,5)^2 + (y-8)^2 = 31,25$

Linjen gennem centrum $O(6½, 8)$ og $A(4,3)$ har hældning: $\frac{8-3}{6,5-4} = \frac{5}{2,5} = 2.$

Det betyder, at tangenten har en hældning på $-\frac{1}{2}$.

Tangentens ligning: $y = -\frac{1}{2} \cdot (x-4) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + 5.$

Opgave 5



Skæringspunkterne kan meget nemt beregnes, men måske også aflæses af grafen. Vi får punkterne

$A(3,8) \quad B(-1,0) \quad C(-3,6)$

Længden af siderne kan selvfølgelig beregne ved hjælp af afstandsformlen, men da det her er så pæne tal, kan vi se på en alternativ metode:

Linjen m har en hældning på -3. Det betyder, at når x-værdien øges med 1 mindskes y-værdien med 3. Vi kan, som det ses af tegningen, derfor tegne netop 2 retvinklede trekanter med kateterne 1 og 3. Det betyder, at hypotenusen i denne trekant bliver lig med $\sqrt{10}$. Derfor får vi: $|BC| = 2\sqrt{10}$.

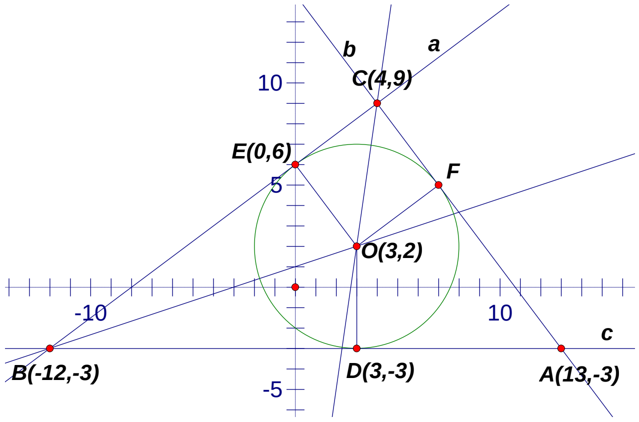
Langs AC kan efter samme metode tegnes 2 tilsvarende trekanter, Så vi får igen: $|AC| = 2\sqrt{10}$.

Langs AB kan tegnes 4 trekanter, hver med hypotenusen $\sqrt{5}$. Det betyder: $|AB| = 4\sqrt{5}$.

Det ses, at $\triangle ABC$ er ligebenet og retvinklet. Dvs.: $\angle A = \angle B = 45° \text{ og } \angle C = 90°$.

$Areal(\triangle ABC) = ½ \cdot 2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{10} = 20.$

Opgave 6



Trekantens vinkelspidser kan beregnes på traditionel vis:

$\frac{3}{4}x+6=-\frac{4}{3}x+\frac{43}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}\right)\cdot x=\frac{43}{3}-\frac{18}{3} \Leftrightarrow x=\frac{25}{3}\cdot\frac{12}{25}=4$. Det giver punktet $C(4,9)$.

Koordinaterne til A og B er nemmere at beregne, da $y=-3$. Vi får de på tegningen viste punkter.

Vi regner på cirklens ligning for at bestemme centrum og radius:

$$x^2-6x+y^2-4y-12=0 \Leftrightarrow \left(x^2-6x+3^2\right)+(y^2-4y+2^2)=12+3^2+2^2 \Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y-2\right)^2=5^2.$$

Cirklen har centrum i $O(3,2)$ og radius lig med 5.

Cirklens røringspunkt med c er nemt at bestemme til $D(3,-3)$, da vi herved får $|OD|=5$.

Vi gætter på at punktet $E(0,6)$ er cirklens røringspunkt med a. Der gælder i hvert fald: $E(0,6)$ ligger på a, $|EO|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ og $EO\perp a$ (kan vises ved at se på hældningskoefficienterne). Det betyder, at $O(3,2)$ ligger på vinkel B's vinkelhalveringslinje.

Da $|EC|=\sqrt{4^2+\left(9-6\right)^2}=5$ er $\triangle OCE$ en ligebenet retvinklet trekant. Det betyder: $\angle ECO=45^\circ$, og da $\angle C=90^\circ$ ligger O også på vinkel C's vinkelhalveringslinje. Hermed er O centrum for trekantens indskrevne cirkel.

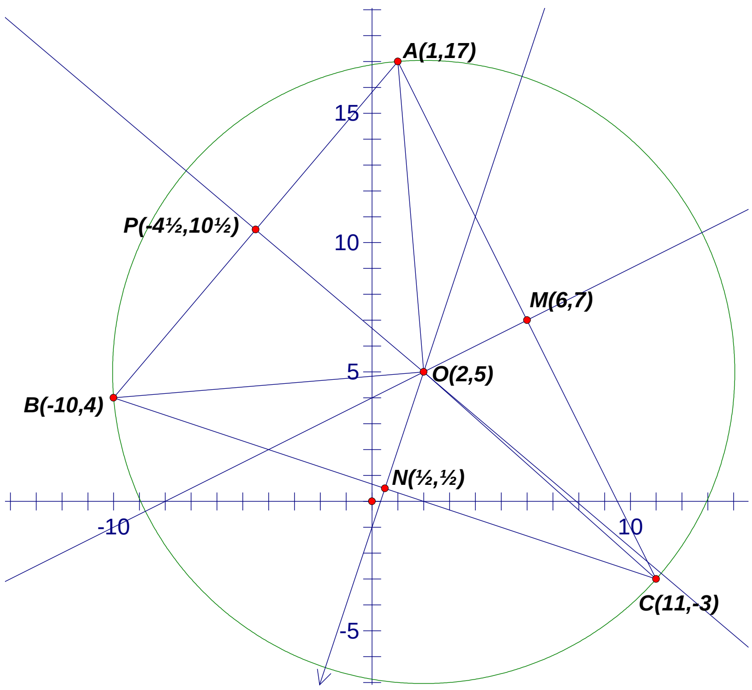
Vi kunne beregne sidernes længde ved afstandsformlen, men det er nemmere at indse:

$$|BE|=|BD|=15 \quad |AD|=|AF|=10 \quad |CE|=|CF|=5$$

Trekantens omkreds$=2s=2\cdot 15+2\cdot 10+2\cdot 5=60 \Leftrightarrow s=30.$

$$Areal\left(\triangle ABC\right)=5\cdot 30=150.$$

Opgave 7



Centrum for den omskrevne cirkel er midtnormalernes skæringspunkt. Man kan derfor bruge følgende metode:

1) Sidemidtpunkterne bestemmes, eksempelvis er midtpunkt M for AC lig med:

$$M = \left(\frac{1+11}{2}, \frac{17+(-3)}{2}\right) = (6,7)$$

2) Midtnormalen skal stå vinkelret på siden. Det betyder, at produktet af de 2 linjers hældningskoefficienter skal være -1. Midtnormalens ligning kan nu bestemmes.

3) Cirklens centrum kan bestemmes som skæringspunkt mellem 2 midtnormaler.

4) Radius er afstanden mellem dette centrum og en af trekantens vinkelspidser.

Men i dette tilfælde kan man ved at tegne (evt. i GeoMeter) gætte sig til centrum, og prøve efter, om afstanden til de 3 vinkelspidser er ens.

Cirklens ligning bliver: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 145$.

Opgave 8

Vi antager, at trekanten med vinkelspidserne $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ og $C(c_1, c_2)$. har de angivne sidemidtpunkter. Hvis f.eks. (5,1) er midtpunkt for AB må der gælde: $\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right) = (5,1)$.

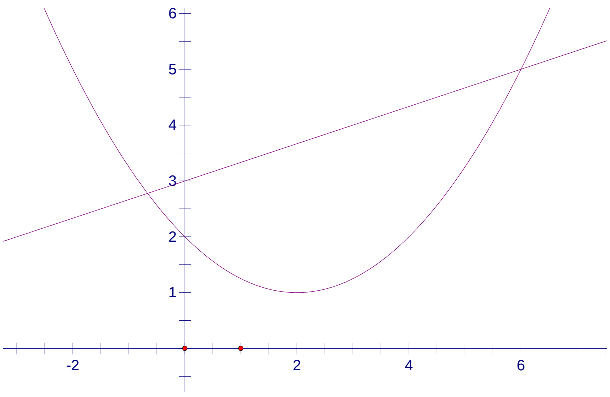
Det giver følgende ligningssystemer:

$$\begin{array}{lllllll} a_1+b_1=10 & & a_1+b_1=10 & & a_1=-1 & & a_2+b_2=2 & & a_2+b_2=2 & & a_2=-2 \\ b_1+c_1=14 & \Leftrightarrow & a_1-c_1=-4 & \Leftrightarrow & b_1=11 & & b_2+c_2=10 & \Leftrightarrow & a_2-c_2=-8 & \Leftrightarrow & b_2=4 \\ a_1+c_1=2 & & a_1+c_1=2 & & c_1=3 & & a_2+c_2=4 & & a_2+c_2=4 & & c_2=6 \end{array}$$

Metoden, der her er anvendt til ligningsløsning, er følgende: De 2 øverste ligning er subtraheret. Herefter er de 2 nederste ligninger adderet, hvorved A ’s koordinaterne kan udregnes og dette kan indsættes i de øvrige ligninger.

Vi fandt punkterne $A(-1,-2)$, $B(11,4)$ og $C(3,6)$.

Opgave 9

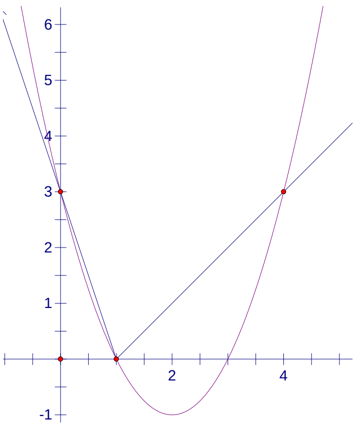


Skæringspunkterne mellem parablen og den rette linje bestemmes ved løsning af ligningen:

$$\frac{1}{4}x^2-x+2=\frac{1}{3}x+3 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2-\frac{4}{3}x-1=0 \Leftrightarrow 3x^2-16x-12=0 \Leftrightarrow x=\frac{16\pm\sqrt{16^2+12^2}}{6} \Leftrightarrow x=6 \vee x=-\frac{2}{3}$$

Det giver skæringspunkterne: $(6,5)$ og $(-\frac{2}{3},\frac{25}{9})$.

Opgave 10



For $x\geq 1$ gælder: $g(x)=2\cdot(x-1)-x+1=x-1$, idet vi her har $x-1\geq 0$.

For $x<1$ får vi derimod: $g(x)=-2\cdot(x-1)-x+1=-2x+2-x+1=-3x+3.$

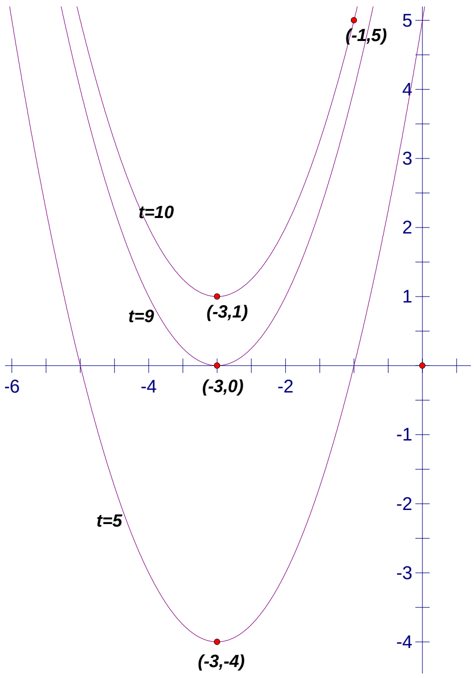
g-funktionen er således den brudte linje.

Vi løser ligningerne:

$$x^2-4x+3=x-1 \Leftrightarrow x^2-5x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \vee x=4$$
$$x^2-4x+3=-3x+3 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$$

Ved indsættelse af *x-værdien* kan *y-værdien* bestemmes. Vi får følgende 3 skæringspunkter: $(0,3)$ $(1,0)$ $(4,3)$. De kunne i øvrigt nemt aflæses af grafen.

Opgave 11



1) Hvis parablen skal have netop ét punkt fælles med $x-aksen$, skal diskriminanten være 0:

$$d=6^2-4t=0 \Leftrightarrow 4t=36 \Leftrightarrow t=9.$$

2) Parablen har ingen punkter fælles med $x-aksen$, når diskriminanten er negativ:

$$d=6^2-4t<0 \Leftrightarrow 4t>36 \Leftrightarrow t>9.$$

3) $P(-1,5)\in f_t \Leftrightarrow 5=(-1)^2+6\cdot(-1)+t \Leftrightarrow t=10.$

Opgave 12

Da parablen $y=ax^2+bx+c$ går gennem de givne punkter kan vi opstille følgende ligninger:

$$\begin{matrix} a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=2 \\ a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=2 \\ a\cdot(2)^2+b\cdot 2+c=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a+b+c=2 \\ a-b+c=2 \\ 4a+2b+c=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a+b+c=2 \\ 2b=0 \\ 4a+c=-1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a+c=2 \\ b=0 \\ 3a=-3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} c=3 \\ b=0 \\ a=-1 \end{matrix}$$

Der er foretaget subtraktion af nogle ligninger, samt indsættelse af fundne resultater.

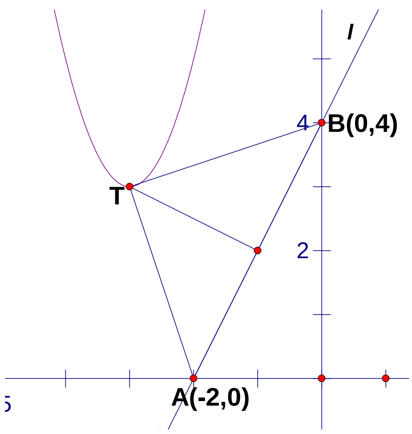
Ligningen for parablen er derfor: $y=-x^2+3$

Vi undersøger løsningsmængden til ligningen:

$$-x^2+3=x+3 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-1$$

Det giver skæringspunkterne: $(0,3)$ og $(-1,2)$.

Opgave 13



Parablen har toppunkt i $(-\frac{b}{2a},-\frac{d}{4a})=\left(\frac{-12}{2\cdot 2},-\frac{12^2-4\cdot 2\cdot 21}{4\cdot 2}\right)=(-3,3)$

Afstanden fra punktet $T(-3,3)$ til linjen *l:* $y=2x+4$ kan beregnes efter formlen side 327:

$$\frac{|y_0-ax_0-b|}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{|3-2\cdot(-3)-4|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\frac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

I stedet for formlen (som man måske ikke kan huske)kunne vi opstille ligningen for linjen gennem T vinkelret på *l*, og derefter bestemme skæringspunkt mellem denne og linjen *l*. Hvorefter afstanden mellem de 2 punkter kan beregnes. Den fundne afstand er højden i trekant ABT.Vi mangler nu, at beregne længden af linjestykket AB:

$$|AB|=\sqrt{(-2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

$$Areal(\triangle ABT)=½\cdot\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=5.$$

Forslag til løsning af "Opgaver til vækstfunktioner" (side 430)

Opgave 1

	Lønindeks for den kommunale sektor (feb. 1996 = 100) i undervisningssektoren. Tallene stammer fra årets 4. kvartal.									
Årstal	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Prisindeks	102,6	104,9	113,4	114,3	121,7	125,9	126,4	133,3	138,3	139,5
Stigning		2,3	8,5	0,9	7,4	4,2	0,5	6,9	5	1,2
Rel.vækst		2,24	8,1	0,79	6,47	3,45	0,4	5,46	3,75	0,87

Fra 1996 til 2005 er lønindekset vokset med en faktor på $\frac{139,5}{102,6} = 1,36$

Den gennemsnitlige stigning pr. år kan udregnes ved: $a^9 = 1,36 \Leftrightarrow a = \sqrt[9]{1,36} = 1,035$

Det betyder en gennemsnitlig stigning på $3,5\%$ pr. år.

For at kunne sammenligne med stigningen i huspriser undersøger vi udvikling i perioden fra 2000 til 2005. Her er lønnen vokset med en faktor på: $\frac{139,5}{121,7} = 1,146$

Det svarer til en gennemsnitlig stigning på: $\sqrt[5]{1,146} = 1,028$. Dvs. $2,8\%$ pr. år.

Vi fandt på side358, at huspriserne fra 2000 til 2005 har haft en gennemsnitlig stigning på $6,6\%$, altså er huspriserne stigning mere end dobbelt så stor som lønstigningen.

Opgave 2

Antallet af drenge i alderen 0-9 år pr. 1.januar 2006									
Alder	8 år	7 år	6 år	5 år	4 år	3 år	2 år	1 år	0 år
Antal	35267	34507	34189	34585	33572	33196	33338	33275	32908
Rel. fald		-2,15%	-0,92%	1,16%	-2,92%	-1,12%	0,43%	-0,19	-1,1%

Antallet af piger i alderen 0-9 år pr. 1. Januar 2006									
Alder	8 år	7 år	6 år	5 år	4 år	3 år	2 år	1 år	0 år
Antal	33471	32730	32785	33088	32204	31459	31817	31780	31603
Rel. fald		-2,22%	-0,17%	-0,92%	-2,67%	-2,31%	1,14%	-0,12%	0,56%
Antal børn	68738	67237	66974	67673	65776	64655	65155	65055	64511

Tabellen er vendt om, så børn på 8 år står først, da der er bedt om sammenligning den vej. Fald er markeret med minus, og som det ses, er der ikke fald overalt. Der er nogenlunde samme tendens for de 2 køn, men også lidt overraskende forskelle.

Der er sket et fald, når man sammenligner antallet af børn på 0 år med antal børn på 8 år. Vi får en faktor på $\frac{64511}{68738} = 0,9385$. Det betyder i gennemsnit: $\sqrt[8]{0,9385} = 0,9921.$

Det svarer til et gennemsnitligt fald på $0,79\%$ pr. år

Vi kan konkludere, at der i de år, perioden dækker over (dvs. fra 1997 til 2006), er født færre børn år for år, i gennemsnit mindst $0,79\%$ pr. år, idet man også må påregne en lille dødelighed.

Opgave 3

En årlig nominel rente på $20,15\%$ giver en månedlig fremskrivningsfaktor på: $\sqrt[12]{1,2015} = 1,0154.$

Det betyder en månedlig rente på $1,54\%$.

Når der afdrages det samme beløb hver måned, har vi et annuitetslån, og vi kan udregne ydelsen y efter formlen (side 363):

$$y = \frac{G \cdot r}{1-(1+r)^{-n}} = \frac{2795 \cdot 0,0154}{1-1,0154^{-43}} = 89,36$$

Det betyder at afdraget skulle have været ca. 89 kr. (afhængigt af hvor mange decimaler man regner med i renten). Der er således betalt $10 \cdot 43 = 430$ kr. i gebyrer.

Opgave 4

Greta har i de 10 års ansættelse en annuitetsopsparing på:

$$12000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 150934{,}71 \text{ kr.}$$

Dette beløb står yderligere 25 år med en fremskrivningsfaktor på 1,05:

Greta har ved pensioneringen et beløb på: $150934{,}71 \cdot 1{,}05^{25} = 511118{,}50$ kr.

Hans har en annuitetsopsparing på: $20000 \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 251557{,}85$ kr.

Hvis Hans indsætter x kr. hvert år i 10 år og ønsker at have mindst 500.000 kr. efter 10, får vi:

$$x \cdot \frac{1{,}05^{10} - 1}{0{,}05} = 500000 \Leftrightarrow x = \frac{500000 \cdot 0{,}05}{1{,}05^{10} - 1} = 39752{,}29 \text{ kr.}$$

Hans skal således indsætte et betydeligt større beløb end Greta for at opnå et tilsvarende beløb ved pensioneringen på grund af tidsforskellen.

Forslag til løsning af ”Opgaver til statistik” (side 431)

Opgave 1

Vi har følgende oplysninger:

Der er 10 observationen, differensen mellem den største og den mindste er lig med 6, mindst 5 af observationerne skal være mindre end eller lig med tallet 4 og 4 er en observation.

Vi kan bruge følgende observationssæt:

Observation x	2	3	4	5	6	7	8
Hyppighed af x	2	2	2	1	1	1	1

Her er der 10 observationer, medianen er lig med 4 og variationsbredden er $8 - 2 = 6$.

En middelværdi på 5 og 10 observationer giver en samlet sum på $5 \cdot 10 = 50$.

I tabellen ovenfor får vi kun en samlet sum på: $2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 44$.

Vi skal have 6 mere og her kan man f.eks. bytte en 2’er om med en 8’er:

Observation x	2	3	4	5	6	7	8
Hyppighed x	1	2	2	1	1	1	2

Vi har fortsat en median på 4. Middelværdien bliver:

$$m=\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 2+5\cdot 1+6\cdot 1+7\cdot 1+8\cdot 2}{10}=5$$

Med $n=11$ og en middelværdi på 5, skal summen af observationer være $5\cdot 11=55.$ Der skal nu være mindst 6 observationer under eller på 4 for at medianen kan blive 4. Lidt puslespil med tallene giver f.eks. følgende mulige observationssæt:

Observation x	2	3	4	6	7	8
Hyppighed x	1	3	2	1	2	2

Her er middelværdien: $m=\frac{2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 2+6\cdot 1+7\cdot 2+8\cdot 2}{11}=5$

Opgave 2

I *7a* har vi den største spredning med en kvartilafstand på $10-5=5$ Det betyder, at det er ca. halvdelen af klassen, der får karakterer under 5 eller over 10. Det er formodentlig en klasse, hvor der skal tages individuelle hensyn for at nå ydergrupperne.

$7b$ har vi en lille spredning, og det er en middel klasse med median på 8 og kvartilafstand på 2. Den må være nem at undervise, da man formodentlig kan nå en stor del af eleverne ved fælles instruktion.

7c har 25% under eller på 6, lidt dårlige end *7b*, men til gengæld er middeltallet nået op på 9, så midtergruppen i klassen er lidt bedre end *7b*.

Opgave 3

interval	$]18;25]$	$]25;35]$	$]35;45]$	$]45;55]$	$]55;68]$
hyppighed	19	155	109	168	134
Kum. hyppighed	19	174	283	451	585
frekvens	0,032	0,265	0,186	0,287	0,229
Kum. frekvens	0,032	0,297	0,483	0,771	1

Typeintervallet er $]45;55]$

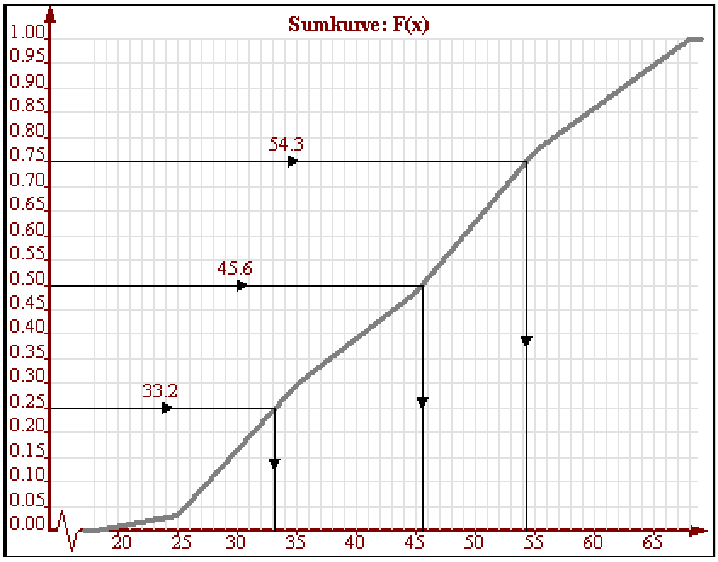
Medianen findes i intervallet $]45;55]$. Vi kan se, at den ligger meget tæt ved 45 år.

Vi kan udregne den mere præcis ved: $45+\frac{0,5-0,483}{0,287}\cdot 10 = ca.45,6$

Ved beregning af middeltallet sættes alle i intervallet til en alder, der svarer til intervallets midtpunkt:

Middeltal $=\frac{21,5\cdot 19+30\cdot 155+40\cdot 109+50\cdot 168+61,5\cdot 134}{585}=44,55$

Denne sumpolygon er tegnet i Helge Thygesens program: Statistik, hvor man også kan aflæse kvartilsættet til $(33,2,\ 45,6,\ 54,3)$



Procentdelen af lærere over 55: $=\frac{134}{585}\cdot 100 = 22,9\%$

Det er nogenlunde samme tal som for Københavns kommune.

En stor del af lærerne vil blive pensioneret i de kommende.

Opgave 4

Interval	20,25	25,30	30,35	35,40	40,45	45,50	50,55	55,60	60;65	65,70
Hyppighed	166	5457	13167	14568	10057	6841	4439	3238	1809	395
Kum.hyp.	166	5623	18790	33358	43415	50256	54695	57933	59742	60137
frekvens	0,003	0,091	0,219	0,242	0,167	0,114	0,074	0,054	0,03	0,007
Kum.frek.	0,003	0,094	0,312	0,555	0,722	0,836	0,910	0,963	0,993	1

Middeltallet:

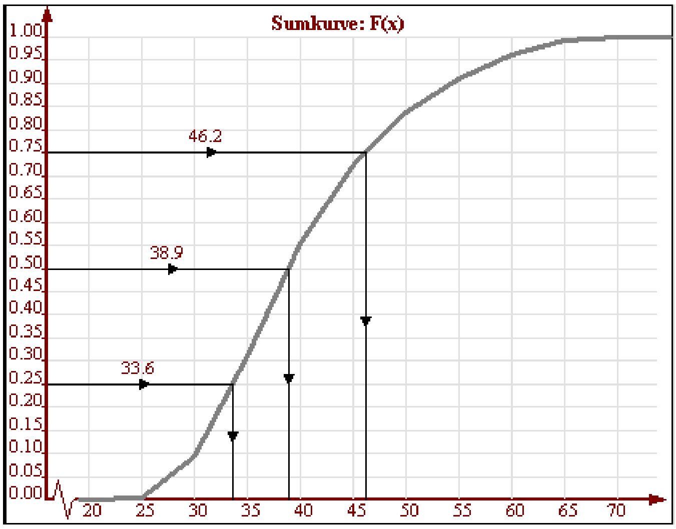
$$\frac{22,5\cdot 166+27,5\cdot 5457+32,5\cdot 13167+37,5\cdot 14568+42,5\cdot 10057}{60137}+$$
$$\frac{47,5\cdot 6841+52,5\cdot 4439+57,5\cdot 3238+62,5\cdot 1809+67,5\cdot 395}{60137}=40,56$$

Medianen ligger i intervallet $]35;40]$. Vi kan udregne den til: $m=35+\frac{0,50-0,312}{0,242}\cdot 5=38,9.$

Typeintervallet er $]35;40]$.

Sumkurven er igen fra Helge Thygesens program: Statistik.

Her kan vi også se kvartilsættet: $(33,6,\ 38,9,\ 46,2)$.



Det var en noget yngre lærerbestand i 1983.

Opgave 5

Nogle få meget rige personer kan hæve gennemsnitsindkomsten betydeligt.

Medianen vil sikkert være betydeligt mindre end middelværdien, og ja, det kan godt lade sig gøre at have en middelværdi større end 3. Kvartil.

Selv om median og middelværdi ofte ligger tæt på hinanden, kan der i særlige observationssæt godt være store forskelle mellem dem.

Forslag til løsning af "Opgaver til kombinatorik" (side 432) Indhold

Opgave 1

1) 1. ciffer kan vælges på 5 måder. For 2. ciffer er der nu 4 mulige valg og herefter er der 3 valgmuligheder for 3. ciffer. Multiplikationsprincippet giver derfor:

   $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ forskellige 3-cifrede tal.

2) Sidste ciffer skal være 5, for at tallet kan være delelig med 5. Vi vælger nu i rækkefølgen: enere, tiere og hundreder og får følgende antal muligheder: $1 \cdot 4 \cdot 3 = 12$

Opgave 2

Dette er udtagelse uden tilbagelægning, da såvel bogstav som ciffer gerne må gentages. Hvis vi også antager, at tallet skal være femcifret, er der kun 9 valg for første ciffer, mens der er 10 valg for hver af de øvrige. Det giver:

$28 \cdot 28 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 7840000.$

Opgave 3

Opgaven er besvaret i opgave 2 i afsnittet om de naturlige, så her nøjes vi med at gentage resultatet:

I en regulær $6-kant$ kan der tegnes: $\frac{6 \cdot 5}{2} - 6 = 9$

I en regulær $n-kant$ kan der tegnes: $\frac{n \cdot (n-1)}{2} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

Opgave 4

1) Hver af de 10 personer hilser på 9 personer. Men herved bliver hvert håndtrykt talt med 2 gange, hvorfor vi får: $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45.$

2) Med n personer får vi efter samme ræsonnement: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Det er i øvrigt formlen for det (n-1)'te trekanttal, idet man også kan argumentere for at antallet svarer til additionen: $\left(n-1\right) + (n-2) + ... + 2 + 1$. 1. Mand: n-1 håndtryk, 2.mand: n-2 håndtryk,…

Opgave 5

Antallet må svare til antal måder, hvorpå der kan udvælges netop 2 punkter blandt de 16 punkter, idet de 2 valgte punkter kan forbindes med netop et linjestykke. Det er desuden en uordnet udvælgelse.

Dvs., at svaret er $K(16,2) = \frac{16 \cdot 15}{2} = 120.$

Opgave 6

1) Hver person "vælger" uafhængigt (med tilbagelægning)af de andre 1 måned blandt 12 mulige. Dvs.: $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 = 12^5$

2) Her vælges uden tilbagelægning: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95040$

Opgave 7

Person A anbringes på en tilfældig plads, ligegyldig hvilken da bordet er rundt: 1 valg

Der vælges en person, f.eks. B, der skal sidde på pladsen til højre for A: 5 valg

Der vælges en person, f.eks. C, der skal sidde på pladsen til højre for B: 4 valg

O.s.v.

Antal muligheder: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

Bemærk: hvis vi havde givet A 6 valg, måtte vi til sidst korrigere ved at dividere med 6, da det er ligegyldigt, hvor de sidder ved bordet. Kun deres indbyrdes placering er af betydning.

Opgave 8

1) For hver kamp er der 3 valg. Vi må gå ud fra uafhængighed mellem de forskellige kampes resultater. Derfor: $3^{13} = 1594323$ forskellige rækker.

2) Der er kun 1 række med 13 rigtige.

3) Der er 1 af de 13 kampe, hvortil vi har valgt et forkert resultat. Den kan være forkert på 2 måder. Derfor er der $13 \cdot 2 = 26$ rækker med 12 rigtige. Ved 11 rigtige har vi valgt forkert ved 2 kampe. De 2 kampe kan udvælges på $K(13,2)$ måder. Hver af dem kan være forkert på 2 måder. Derfor er der: $K(13,2) \cdot 2 \cdot 2 = 312$ rækker med 11 rigtige.

Opgave 9

1) Der skal udvælges 7 tal (uordnet) blandt 36 tal. Det giver:
$$K(36,7) = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8347680.$$

2) Vi skal vælge de 6 tal, der skal være rigtige, blandt de 7 rigtige tal. Herefter skal vi vælge 1 forkert tal blandt de 29 forkerte tal. Det giver følgende valgmuligheder: $K(7,6) \cdot 29 = 7 \cdot 29 = 203$.

3) Vi har Ingen rigtige, hvis vi vælger alle 7 tal blandt de 29 forkerte tal: $K(29,7) = 1560780$

Opgave 10

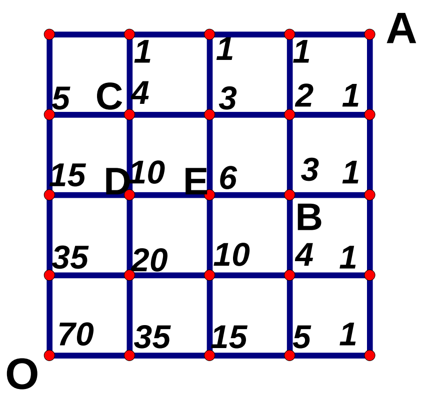
1) Alle ruter fra B til A betyder, at vi skal bevæge os i alt 3 trin, nemlig 2 lodrette og 1 vandret. Det vandrette trin kan enten være det første trin, nr. 2 trin eller 3. Trin. Det betyder 3 ruter.

Kombinatorisk kan sige, at vi skal vælge 1 vandret trin blandt 3 trin. Det giver $K(3,1)=3$ forskellige ruter.

2) Der er 4 trin mellem C og A. Heraf skal 3 være vandrette. Efter samme princip som i 1) betyder det: $K(4,3)=4$ forskellige ruter.

3) Vi skal bevæge os 4 vandrette og 4 lodrette, i alt 8 trin. Det giver: $K(8,4)=\dfrac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=70.$ forskellige ruter. Hvis man synes, at det er lidt svært at forstå princippet bag disse løsninger, hjælper det måske, at forestille sig de 8 trin nummereret, og for hvert nummer står der enten v eller l afhængigt af, om det pågældende trin skal være vandret eller lodret. En rute kan f.eks. se sådan ud: $llvlvvlv$. Her ved man, at 3., 5., 6. og 8. trin skal være vandrette, resten lodrette.

En alternativ måde at løse opgaven på kan være, at man ud for hvert hjørne i vejnettet skriver hvor mange ruter, der er fra dette punkt til A. Så kan man bygge skemaet op gradvis efter samme princip som i Pascals trekant. Når man f.eks. står i punktet D, kan man enten gå til E eller til C, det giver $6+4=10$ mulige valg.



Opgave 11

1) Der er tale om ordnet rækkefølge: $6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=720.$

2) Hvis 1 og 2 står med 1 forrest kan 12 betragtes som ét ciffer. Hvis 2 er forrest, kan 21 betragtes som ét ciffer. Vi har i begge tilfælde lov at betragte det som om, der kun var 5 cifre. Vi får: $2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=240$

Opgave 12

Vi vælger de 4 taster, som skal stå i stillingen 0. Det giver: $K(6,4)=\dfrac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=15.$

For hvert af disse 15 valg af taster, der skal stå i stillingen 0, er der 3 valg for hver af de 2 øvrige taster, idet de ikke må stå i 0.

Det giver i alt: $3\cdot 3\cdot 15=135$

Opgave 13

Hver passager har 6 valg. Det giver: 6^{20} valgmuligheder, idet man tænker på passagererne som forskellige personer.

Opgave 14

1) Det fælles medlem vælges. Her er der 10 valg.
2) De 4 øvrige medlemmer til 5-mandsgruppe vælges blandt 9. Det giver: $K(9,4)=126$ valg.
3) De 3 sidste medlemmer til 4-mandsgruppen vælges blandt de resterende 5 medlemmer. Det giver: $K(5,3)=10$ valg

Udvælgelsen kan dermed ske på: $10 \cdot 126 \cdot 10 = 12600$ måder.

Forslag til løsning af "Opgaver til sandsynlighedsregning" (side 434)

Opgave 1

Vi kan selv vælge, om vi vil arbejde med ordnet eller uordnet udtagelse, hvis vi blot sikrer, at vi er konsekvente i vores valg, dvs. samme valg for antal udfald i hændelsen og i udfaldsrummet.

Her er valgt uordnet udtagelse, da udtagelsen af tal ganske vist sker i en rækkefølge, men i de 3 hændelser, der indgår i opgaver, er det ikke nødvendigt at skelne mellem den rækkefølge, de 4 tal kommer i.

Vort udfaldsrum består af $K(90,4)$ forskellige udfald.

1) Hvis alle 4 tal er valgt på Sørens plade, er der $K(15,4)$ forskellige valg. Derfor:

$$P(A)=\frac{K(15,4)}{K(90,4)}=\frac{1365}{2555190}=0{,}000534$$

2) Hvis ingen af tallene er på Sørens plade, er de alle valgt blandt de 75 tal, som Søren ikke har. Det giver:

$$P(B)=\frac{K(75,4)}{K(90,4)}=\frac{1215450}{2555190}=0{,}4757$$

3) 1 af tallene skal vælges fra Sørens plade, og det skal kombineres med de valg, der er for at vælge de 3 øvrige tal blandt de 75 tal, som Søren ikke har. Vi får:

$$P(C)=\frac{K(15,1)\cdot K(75,3)}{K(90,4)}=\frac{15\cdot 67525}{2555190}=0{,}3964$$

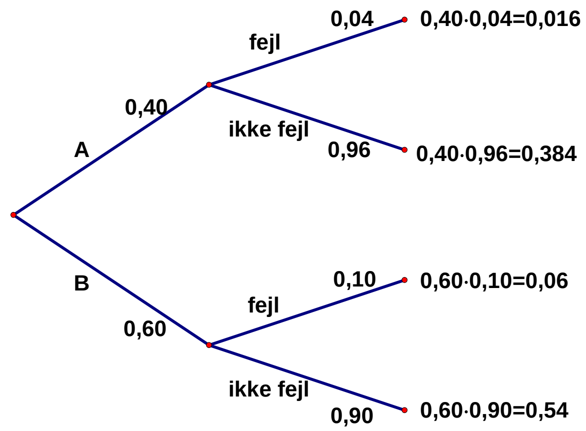
Begrundelsen for at vælge uordnet udtagelse er, at $P(C)$ er vanskeligere ved ordnet udtagelse.

Her skal man nemlig også tage hensyn til hvilket af de 4 trækninger, der er et tal fra Søren plade.

Vi får derfor ved ordnet udtagelse: $P(C)=\dfrac{4\cdot 15\cdot 75\cdot 74\cdot 73}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87}=0,3964$

Opgave 2

Vi laver et chancetræ:



Der er 2 grene, der repræsenterer, at kuglepennen har fejl, nemlig øverste og 3. gren fra oven.

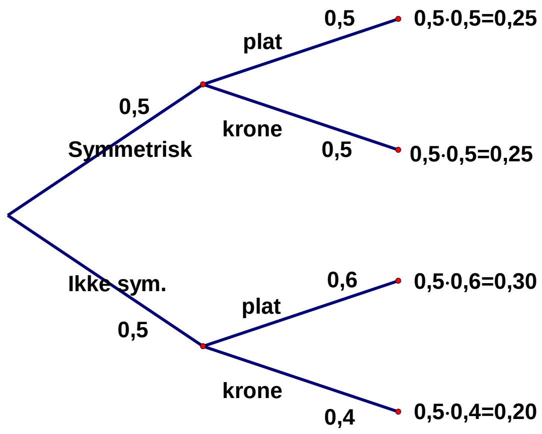
Det giver: $P(Fejl)=0,40\cdot 0,04+0,60\cdot 0,10=0,016+0,06=0,076$

Når vi ved, at når der er fejl ved kuglepennen, stammer den enten fra A eller B. Det betyder, at vi enten er ved 1. eller 3. gren fra oven. Vi skal finde, hvor stor en procentdel af de fejlproducerede varer, der stammer fra A. Med andre ord hvor meget udgør tallene fra 1. gren af det samlede tal for de 2 grene:

$$P(Kuglepennen\ stammer\ fra\ A\,|\,der\ er\ fejl)=\frac{0,40\cdot 0,04}{0,40\cdot 0,04+0,6\cdot 0,10}=\frac{0,016}{0,076}=0,21$$

Opgave 3

Opgaven er af samme type som opgave 2. Vi har 2 slags mønter, en symmetrisk med en sandsynlighed for plat på 0,5 og en ikke symmetrisk med en sandsynlighed for plat på 0,6. Når der vælges tilfældigt, er der lige stor chance for valg af de 2 mønter.



$$P(Plat) = 0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,6 = 0,55.$$

$$P(ikke\ sym.\ mønt \mid Plat) = \frac{0,5 \cdot 0,6}{0,5 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,6} = \frac{0,30}{0,55} = 0,545$$

Opgave 4

Der er tale om en binomialfordeling, da bilen enten har lygtefejl eller ej. Når der udtages 3, har vi $n = 3$.

Vi har derfor: $X \sim b(3,\ 0{,}40)$

$$\text{P(2 af de 3 biler har lygtefejl)} = k(3,2) \cdot 0,4^2 \cdot 0,6 = 3 \cdot 0,16 \cdot 0,6 = 0,288.$$

Opgave 5

Vi udregner sandsynligheden for, at nøglen passer i 1., 2., 3., 4., 5., 6 eller 7. forsøg. Det viser sig, at der, som vi kan se i udregninger nedenfor, er den samme sandsynlighed for hvert af de 7 forsøg.

$$P(nøglen\ passer\ i\ 1. forsøg) = P(X = 1) = \frac{1}{7}$$

$$P(nøglen\ passer\ i\ 2. forsøg) = P(X = 2) = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{7} \text{ (den første passer ikke, men den anden passer)}$$

$$P(nøglen\ passer\ i\ 3. forsøg) = P(X = 3) = \frac{6}{7} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7} \text{ (de 2 første passer ikke, men den tredje passer)}$$

o.s.v.

Der er således tale om en jævn sandsynlighedsbelægning.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} + 4 \cdot \frac{1}{7} + 5 \cdot \frac{1}{7} + 6 \cdot \frac{1}{7} + 7 \cdot \frac{1}{7} = (1+2+3+4+5+6+7) \cdot \frac{1}{7} = 4$$

Opgave 6

Når der udtages med tilbagelægning, er der ved hver udtrækning en sandsynlighed på $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ for at få et es.

1) $P(3\ esser) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{1000} = 0{,}001.$

2) $P(antal\ esser\ er\ større\ end\ 0) = 1 - P(0\ esser) = 1 - \left(\frac{36}{40}\right)^3 = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{271}{1000} = 0{,}271.$

3) Vi får: $X \sim b(3, \frac{1}{10})$ og $E(X) = n \cdot p = 3 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}3$

4) Vi beregner først følgende sandsynligheder:

$$P(X = 0) = \left(\frac{9}{10}\right)^3 = 0{,}729.$$

$$P(X = 1) = K(3,1) \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{3 \cdot 81}{1000} = \frac{243}{1000} = 0{,}243.$$

$$P(X = 2) = K(3,2) \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{10} = \frac{3 \cdot 9}{1000} = 0{,}027.$$

Idet Y betegner A's overskud, har Y følgende sandsynlighedsfordeling:

Y	-1	1	10	100
$P(Y = y)$	$P(X = 0) = 0{,}729$	$P(X = 1) = 0{,}243$	$P(X = 2) = 0{,}027$	$P(X = 3) = 0{,}001$

$$E(Y) = -1 \cdot 0{,}729 + 1 \cdot 0{,}243 + 10 \cdot 0{,}027 + 100 \cdot 0{,}001 = -0{,}116$$

Opgave 7

Der er hver gang en sandsynlighed på $\frac{1}{3}$ for at gætte rigtigt.

1) Med 8 spørgsmål vil den stokastiske variable X, der tæller antal rigtige svar, være fordelt efter binomialfordelingen: $b(8, \frac{1}{3})$. Med 12 spørgsmål gælder: $X \sim b(12, \frac{1}{3})$. Det betyder:

$P(prøven\ er\ bestået) = P(X \geq 4; 8, 1/3) = 0{,}2586$ (resultat fundet i tabel)

$P(prøven\ er\ bestået) = P(X \geq 6; 12, 1/3) = 0{,}1777$ (resultat fundet i tabel)

2) Vi skal åbenbart bestemme n således at: $P(x \geq \frac{n}{2}; n, \frac{1}{3}) \leq 0,10.$ Forskellige tabelopslag giver:

$$P(X \geq 8; 15, 1/3) = 0,0882 \quad P(X \geq 8; 16, 1/3) = 0,1265 \quad P(X \geq 9; 17, 1/3) = 0,0755$$

Ved ulige antal spørgsmål er kravene strengere, og dermed bliver sandsynligheden mindre for at man kan slippe gennem prøven ved gæt alene. Med 25 spørgsmål får vi:

$P(X \geq 13; 25, 1/3) = 0,0415.$ Her er vi således under 5%.

Opgave 8

Hvis spilleren satser på felt a, hvor $1 \leq a \leq 6$, taber han 1 kr., hvis ingen af de 2 terninger viser a. Han vinder 2 kr., hvis en af terningerne viser a, og han vinder 4 kr., hvis begge terninger viser a. Idet den stokastiske variable X angiver hans overskud, får vi:

$$P(X = -1) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}.$$

$$P(X = 2) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{36}.$$

$$P(X = 4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

$$E(X) = -1 \cdot \frac{25}{36} + 2 \cdot \frac{10}{36} + 4 \cdot \frac{1}{36} = -\frac{1}{36}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 \cdot \frac{25}{36} + 4 \cdot \frac{10}{36} + 16 \cdot \frac{1}{36} - (-\frac{1}{36})^2 = \frac{2915}{36^2} = 2.25$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2,25} = ca.1,5$$

Spilleren taber, hvis ingen af de 2 terninger viser 3. Sandsynligheden herfor er hver gang $\frac{25}{36}$.

$$P(Han\ taber\ netop\ 6\ gange\ ud\ af\ 10 spil) = K(10,6) \cdot \left(\frac{25}{36}\right)^6 \cdot \left(\frac{11}{36}\right)^4 = 0,2053$$

Opgave 9

Månedlig gevinstchance= $\frac{14880}{380000} = ca.0,039$

$$P(\text{Mindst 1 gevinst i 6 trækninger}) = 1 - P(0\ gevinster) = 1 - (1 - 0,039)^6 = 0,2131$$

I min udregning er der taget så mange decimaler med , som lommeregneren regner med, og herved får man netop det tal, som angivet i folderen.

$$P(0\ milliongevinster\ \ i\ \ 12\ trækninger) = \left(\frac{380000-7}{380000}\right)^{12} = 0,999779$$

Det betyder, at sandsynligheden for mindst 1 gevinst i klasselotteriet er $1-0,999779 = 0,00022103.$

I Lotto er risikoen for 0 milliongevinster på en kupon med 10 rækker:

$$(1-\frac{1}{8347680})^{10} = (0,99999988)^{10} = 0,9999988$$

$$P(0\ miliongevinster\ \ i\ \ 41\ uger) = \left(0,9999988\right)^{41} = 0,999950801$$

$$P(Mindst\ \ 1\ milliongevinst\ \ i\ \ 41\ uger) = 1-0,999950801 = 0,000049199$$

Multiplicerer vi dette tal med 4,61, får vi $0,000226807$, der er tæt på chancen for milliongevinst i Klasselotteriet. Mine tal giver, at chancen i Klasselotteriet er ca. 4,5 gange så stor som i Lotto. Unøjagtigheden kan skyldes afrunding af decimaler.

Forslag til løsning af ”Opgaver til binomialtest” (side 434)

Opgave 1

Vi opstiller følgende test:

Nulhypotese: $p_0 \le 0,05.$

50 kirsebær undersøges for forekomst af sten. Alene et for højt tal af kirsebær med sten er kritisk for hypotesen, idet der i denne påstås, at der højst er 5% med sten. Vi får derfor en højresidet test.

Signifikansniveauet skal være 5% .

Det betyder, at vi søger den mindste værdi *J*, der opfylder, at:
$P(Antal\ \ kirsebær\ \ med\ \ sten \ge\ j;50,0,05) \le 0,05$

Vi finder (i tabel eller ved hjælp af regneark): $P(Antal\ \ kirsebær\ \ med\ \ sten \ge 6;\ \ 50,\ \ 0,05) = 0,0378.$

Mens $P(Antal\ \ kirsebær\ \ med\ \ sten \ge 5;\ \ 50,\ \ 0,05) = 0,1036,$ hvorfor 6 er den kritiske værdi.

Vi får således den kritiske mængde: $K = \{6,\ 7,\ 8,\ ...,49,\ 50\}$

Opgave 2

Da der normalt højst dumper 20%, Får vi:

Nulhypotese: $p_0 \leq 0,20.$ 30 kandidater testes.

Alene et for stort antal, der dumper, vil være kritisk for hypotesen. Det giver en højresidet test.

Med 5% signifikansniveau søger vi det mindste tal j, der opfylder:
$P(Antal\ der\ dumper \geq j;30,0,20) \leq 0,05.$

Af tabellen finder vi:

$P(Antal\ der\ dumper \geq 10;\ 30,\ 0,20) = 0,0611$ og $P(Antal\ der\ dumper \geq 11;\ 30,\ 0,20) = 0,0256$

Med 5% signifikansniveau får vi den kritiske mængde $K = \{11,\ 12,\ ...,\ 29,\ 30\}.$

Resultatet 10 er dermed ikke signifikant på 5% niveau, men det vil være signifikant på 10% niveau.

Opgave 3

Nulhypotese: $p_0 \geq 0,60.$ Her er alene et for lille antal af varer af $1.\ kvalitet$ kritisk for hypotesen. Vi får derfor en venstresidet test.

Med signifikansniveau 1% søger vi det største tal j, der opfylder:

$P(\text{antal varer af } 1.kvalitet \leq\ j;\ 40,\ 0.60) \leq 0,01$

Vi finder i tabellen:

$P(\text{antal varer af } 1.kvalitet \leq 16;\ 40,\ 0.60) = 0,0083$
$P(\text{antal varer af } 1.kvalitet \leq 17;\ 40,\ 0.60) = 0,0189$

Den kritiske mængde er $K = \{1,2,...,15,16\}$

Da 16 tilhører den kritiske mængde er resultatet 16 signifikant på 1% niveau. Hypotesen om, at der fortsat er mindst 60% af $1.\ kvalitet$ må forkastes.