Uordnet udvælgelse med tilbagelægning (med bevis)

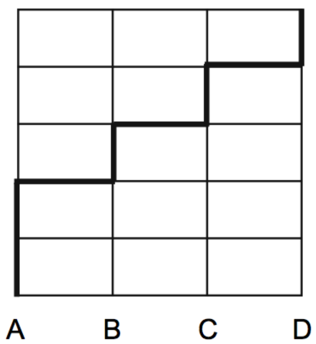
Den sidste udvælgelsestype, vi skal se på, er den, hvor man tillader, at et element vælges flere gange, men hvor rækkefølgen af valgene er ligegyldig. Vi har i bogen på side 314 illustreret det med isvafler i eksempel 9. I det følgende når vi frem til et bevis for den generelle formel, men vi vælger at præsentere hovedtanken i beviset ud fra et eksempel. I eksemplet skal vi bruge tankegangen fra opgave 16 (side 312).

For ikke at bringe alt for mange hverdagsbilleder på banen forestiller vi os, at vi har elementerne A, B, C og D og skal vælge 5 med tilbagelægning.

Da rækkefølgen ikke spiller en rolle, vælger vi at skrive udvælgelserne op alfabetisk. Det kan fx være AABCD, ABBDD, BBDDD...

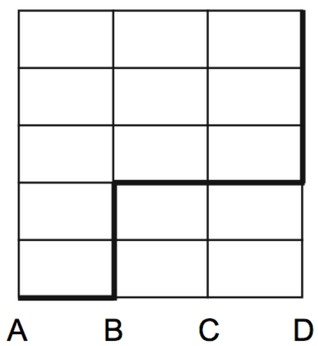
Vi skal nu se, hvorledes tankegangen fra opgave 16 kan bringes i anvendelse i det konkrete problem.

Udvælgelsen AABCD kan repræsenteres som en sti i et gitter, der er 3 bred og 5 høj,

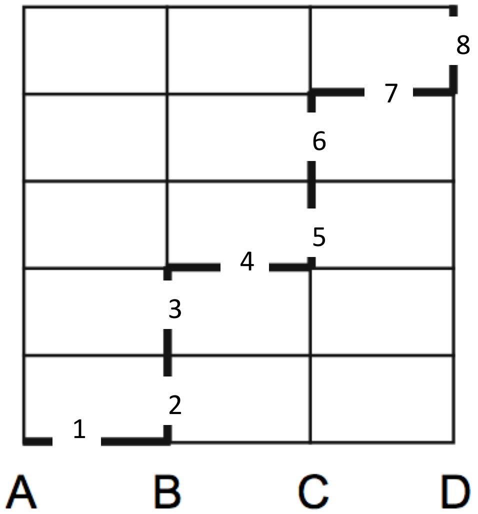


og enhver udvælgelse af fem symboler kan repræsenteres ved en sådan sti fra A til øverste højre hjørne i gitteret.

BBDDD repræsenteres som



Hvis man omvendt har givet en sti i gitteret fx



så kan den umiddelbart oversættes til en udvælgelse, her BBCCD.

Der er altså det samme antal stier i gitteret, som der er måder, man uordnet og med tilbagelægning kan udvælge fem elementer fra mængden {A, B, C, D}. Så vi har transformeret vores problem om antallet af udvælgelser til at være et problem om antallet af stier i et sådant gitter. Da enhver sådan sti består af 3 + 5 = 8 led, hvoraf de fem skal stå lodret, er antallet af stier lig med K(8,5). For ethvert uordnet udvalg af fem af leddene fremkommer der nemlig en sti af den ønskede type. Den sidst viste sti svarer til, at vi har valgt følgende fem led {2, 3, 5, 6, 8} som de lodrette, idet vi nummererer leddene i rækkefølgen fra den første til den ottende.

Gitterets vandrette bredde vil altid være 1 mindre end antallet af elementer (n), man vælger blandt, altså n – 1. Det er fordi vi identificerer elementerne med de lodrette linjer i gitteret. Gitterets højde svarer til antallet af udvalgte elementer (r).

Derfor kan argumentationen i eksemplet ovenfor umiddelbart generaliseres til den almene situation, hvor der skal vælges r elementer blandt n mulige, som i sætning 1, s. 314 i ω-bogen. For her bliver antallet af mulige arrangementer lig med antallet af stier fra nederste venstre hjørne til øverste højre i et gitter af bredden n – 1 og højden r. Og da enhver sådan sti svarer til et uordnet udvalg af r elementer valgt blandt stiens (n – 1) + r led, kan det gøres på K(n + r – 1, r) måder, som hævdet i sætning 1.